

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

**GEOMETRIA DESCRITIVA B**

10º E 11º ANOS

OU

11º E 12º ANOS

CURSO TECNOLÓGICO DE DESIGN DE EQUIPAMENTO  
CURSO TECNOLÓGICO DE MULTIMÉDIA  
CURSO ARTÍSTICO ESPECIALIZADO DE COMUNICAÇÃO AUDIOVISUAL

**AUTORES**

JOÃO PEDRO XAVIER (COORDENADOR)  
JOSÉ AUGUSTO REBELO

**HOMOLOGAÇÃO**

05/03/2001

# ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO</b>                     | <b>3</b>  |
| <b>2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA</b>       | <b>5</b>  |
| FINALIDADES                              | 5         |
| OBJECTIVOS                               | 5         |
| VISÃO GERAL DE TEMAS/CONTEÚDOS           | 6         |
| SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS           | 10        |
| COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER               | 11        |
| AVALIAÇÃO                                | 12        |
| RECURSOS                                 | 14        |
| <b>3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA</b>    | <b>15</b> |
| GESTÃO                                   | 15        |
| CONTEÚDOS/TEMAS, SUGESTÕES METODOLÓGICAS | 15        |
| CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA | 27        |
| MODELOS DIDÁCTICOS                       | 30        |
| GLOSSÁRIO                                | 31        |
| <b>4. BIBLIOGRAFIA</b>                   | <b>33</b> |
| DIDÁCTICA ESPECÍFICA                     | 33        |
| GEOMETRIA                                | 33        |
| GEOMETRIA DESCRITIVA                     | 36        |
| DESENHO TÉCNICO                          | 41        |

# 1. INTRODUÇÃO

GEOMETRIA DESCRITIVA B é uma disciplina bianual que integra a componente de formação científica do Curso Tecnológico de Design de Equipamento, do Curso Tecnológico de Multimédia e do Curso Artístico Especializado de Comunicação Audiovisual.

É uma disciplina de iniciação à Geometria Descritiva e, como tal, os conteúdos que a integram foram seleccionados de molde a garantir um campo de competências essenciais no âmbito da representação diédrica e da representação axonométrica.

Os conteúdos constantes do Programa de GD-B, após o *módulo inicial* de introdução à geometria no espaço, abordam dois sistemas de representação - **diédrico** e **axonométrico** - considerados como fundamentais ou basilares na formação secundária de um aluno no âmbito da Geometria Descritiva.

Optou-se por leccionar os dois sistemas de representação referidos na sequência indicada, já que parece justificável que o estudo do sistema de representação axonométrica se faça, no ensino secundário, com um grau de desenvolvimento maior do que no ensino básico, onde este sistema mereceu apenas uma abordagem pertencente ao domínio do Desenho Técnico aliada à representação de formas bastante simples, predominantemente paralelepípedicas. Sendo assim, embora o estudo da axonometria continue a visar, fundamentalmente, a representação de formas ou objectos tridimensionais, interessa agora fazer a desmontagem do sistema, conhecer os seus princípios e entender o seu funcionamento, o que implica uma síntese de operações abstractas que o aluno não está apto a realizar no início do 10º ano, além de pré-requisitos específicos que o estudo desenvolvido do sistema de representação diédrica lhe deverá proporcionar.

É exactamente a representação diédrica que constitui o cerne do programa, dado que o conhecimento deste sistema de representação não só permite adquirir os pré-requisitos necessários para a aprendizagem de qualquer outro, como se revela bastante eficaz na consecução do objectivo essencial de desenvolver a capacidade de ver e de representar o espaço tridimensional.

Em relação à sequência do ensino-aprendizagem dos conteúdos no âmbito da representação diédrica ainda que, em cada ano, o percurso se inicie com situações que implicam um maior grau de abstracção, foi procurado atenuar esta componente, através das didácticas e metodologia propostas. Desse modo, para que a aprendizagem da abstracção seja favorecida, propõe-se que seja realizada em ligação ao concreto, através do recurso sistemático a modelos tridimensionais nos quais se torna possível simular, de forma visível e palpável, as situações espaciais que o aluno irá representar posteriormente na folha de papel - após ter visto e compreendido - sem decorar apenas traçados, situação que, irremediavelmente, o impediria de resolver problemas mais complexos. Refira-se, porém, que o recurso a modelos é apenas um ponto de partida a adoptar nas fases iniciais da aprendizagem que irá sendo progressivamente abandonado à medida que o aluno for atingindo maior capacidade de abstracção e maturidade na visualização a três dimensões, ainda que possa reutilizá-los, se necessário, em situações pontuais.

Também o recurso a *software* de geometria dinâmica pode, em contraponto com os modelos tridimensionais, ser muito interessante e estimulante nas actividades de ensino-aprendizagem por permitir registar graficamente o movimento e, sobretudo, por facilitar a detecção, em tempo real, das invariantes dos objectos geométricos quando sujeitos a transformações, favorecendo, por conseguinte, **a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia.**

Essa faceta permite a exploração dessas mesmas transformações, que estão na raiz do próprio *software*, o que dá entrada ao aluno, na Geometria, através de um conceito extremamente lato e poderoso, que está na essência das projecções utilizadas na representação descritiva. Por outro lado, a arquitectura destes programas de computador, favorece o desenvolvimento de um ensino-aprendizagem baseado na experimentação e na descoberta permitindo deduzir, a partir de indícios, as leis gerais que governam os problemas geométricos que vão sendo propostos.

Outra opção seguida consistiu na partição de unidades, o que se julga, pedagogicamente, mais adequado a alunos do ensino secundário e mais ajustado à divisão inevitável do Programa em dois anos lectivos. Deveremos pensar que um programa não se destina apenas a alunos bons, para os quais qualquer método pedagógico se adapta, mas para o aluno médio com algumas dificuldades na aprendizagem. Como afirma Britt-Mari Barth no seu livro "O Saber em Construção": *... para poder utilizar os seus conhecimentos mais tarde o aluno deve, ele próprio, construir o seu saber, mobilizando ferramentas intelectuais de que dispõe e que podem ser aperfeiçoadas. Reproduzir um saber não é a mesma coisa que construí-lo. Nesta óptica, a responsabilidade do professor é transmitir o saber de tal modo que esta construção pessoal seja possível (... ) dado que o saber não é estático, mas sim dinâmico, convém "pará-lo" numa dada altura, nem que seja de modo provisório, a fim de situar pontos de referência.* O estudo de uma determinada unidade de aprendizagem de forma exaustiva, implicando uma enumeração maciça de conceitos pode, por um lado, criar um desgaste e, por outro, provocar lacunas intermédias que impedirão o aluno de atingir o nível pretendido. Se esse mesmo estudo for construído por fragmentos com graus de dificuldade crescente, permitirá a reflexão nos tempos de paragem, a fim de relembrar e sedimentar os conhecimentos adquiridos, avançando posteriormente para uma nova etapa de forma mais segura e consciente.

## 2. APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

### FINALIDADES

- Desenvolver a capacidade de percepção dos espaços, das formas visuais e das suas posições relativas
- Desenvolver a capacidade de visualização mental e representação gráfica, de formas reais ou imaginadas
- Desenvolver a capacidade de interpretação de representações descritivas de formas
- Desenvolver a capacidade de comunicar através de representações descritivas
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas
- Desenvolver a capacidade criativa
- Promover a auto-exigência de rigor e o espírito crítico
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia, solidariedade e cooperação

### OBJECTIVOS

- Conhecer a fundamentação teórica dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Identificar os diferentes tipos de projecção e os princípios base dos sistemas de representação diédrica e axonométrica
- Reconhecer a função e vocação particular de cada um desses sistemas de representação
- Representar com exactidão sobre desenhos que só têm duas dimensões os objectos que na realidade têm três e que são susceptíveis de uma definição rigorosa (Gaspard Monge)
- Deduzir da descrição exacta dos corpos as propriedades das formas e as suas posições respectivas (Gaspard Monge)
- Conhecer vocabulário específico da Geometria Descritiva
- Usar o conhecimento dos sistemas estudados no desenvolvimento de ideias e na sua comunicação
- Conhecer aspectos da normalização relativos ao material e equipamento de desenho e às convenções gráficas

- Utilizar correctamente os materiais e instrumentos cometidos ao desenho rigoroso
- Relacionar-se responsabilmente dentro de grupos de trabalho, adoptando atitudes comportamentais construtivas, solidárias tolerantes e de respeito

## VISÃO GERAL DOS TEMAS/CONTEÚDOS

O Programa é composto por um *módulo inicial* que contempla conteúdos essenciais de Geometria Euclidiana do Espaço extraídos do Programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico. Segue-se uma introdução geral à Geometria Descritiva, muito sintética, para se passar ao estudo da Representação Diédrica que constitui o tema central do Programa, que se reparte, inevitavelmente, pelos dois anos lectivos. Conclui o programa o estudo dos fundamentos da Representação Axonométrica e sua aplicação na representação de formas tridimensionais. A repartição temática do Programa e o respectivo peso de cada unidade aparece esquematizada no seguinte quadro:

### QUADRO RESUMO DO PROGRAMA

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| Módulo Inicial                    | 9 aulas   |
| Introdução à Geometria Descritiva | 4 aulas   |
| Representação Diédrica            | 98 aulas  |
| Representação Axonométrica        | 21 aulas  |
| Total de aulas de 90 minutos      | 132 aulas |

Os conteúdos seleccionados são considerados como essenciais e estruturantes para o desenvolvimento do conhecimento do espaço articulado com a aprendizagem da representação descritiva de formas no âmbito dos sistemas de representação a estudar.

É proposta uma sequência, em correspondência com sugestões metodológicas específicas, que se julga ser mais conveniente. Isso não obsta, no entanto, a que cada professor leccione o Programa de modo diverso do proposto, tanto mais se a sua experiência de leccionação por outras vias tenha demonstrado ser igualmente positiva. Fundamentalmente importa reter que a rigidez na compartimentação dos conteúdos é mais aparente do que real podendo, em múltiplas situações, a sua sobreposição ou reordenação revelar-se mais vantajosa.

Como exemplo referem-se os temas de representação de figuras planas contidas em planos projectantes ou de sólidos com base assente nesses planos que sucedem o estudo dos métodos geométricos auxiliares mas podem ser abordados em simultaneidade. Como estas, muitas outras situações podem permitir a sobreposição de itens ou mesmo alterações de sequência, que poderão ser tanto mais profícuas quanto maior for a experiência metodológica do professor.

Para além dos conteúdos referidos, a que corresponde uma carga horária determinada, existem questões transversais que se prendem com a normalização do desenho, relativamente a equipamento (instrumentos e materiais de traçado e medição: critérios de escolha, manutenção e conservação; suportes: critérios de escolha, conservação) e aspectos de

representação (princípios gerais de representação; escrita, formatos dos desenhos, material de desenho; termos relativos a desenhos técnicos), que não poderão deixar de ser veiculados.

## CONTEÚDOS DE CADA ANO

### 10º ANO

#### DESENVOLVIMENTO

---

#### 1. Módulo inicial

---

- 1.1 Ponto
- 1.2 Recta
- 1.3 Posição relativa de duas rectas
  - complanares
  - paralelas
  - concorrentes
  - enviesadas
- 1.4 Plano
- 1.5 Posição relativa de rectas e de planos
  - recta pertencente a um plano
  - recta paralela a um plano
  - recta concorrente com um plano
  - planos paralelos
  - planos concorrentes
- 1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos
  - rectas perpendiculares e ortogonais
  - recta perpendicular a um plano
  - planos perpendiculares
- 1.7 Superfícies
  - Generalidades, geratriz e directriz
  - Algumas superfícies:
    - plana
    - piramidal
    - cónica
    - prismática
    - cilíndrica
    - esférica
- 1.8 Sólidos
  - pirâmides
  - prismas
  - cones
  - cilindros
  - esfera
- 1.9 Secções planas de sólidos e truncagem

---

#### 2. Introdução à Geometria Descritiva

---

- 2.1 Geometria Descritiva
    - 2.1.1 Resenha histórica
    - 2.1.2 Objecto e finalidade
    - 2.1.3 Noção de projecção
      - projectante
      - superfície de projecção
      - projecção
  - 2.2 Tipos de projecção
    - 2.2.1 Projecção central ou cónica
    - 2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica
      - projecção oblíqua ou clinogonal
      - projecção ortogonal
-

- 
- 2.3 Sistemas de representação - sua caracterização:
- pelo tipo de projecção
  - pelo número de projecções utilizadas
  - pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional
    - projecção única
    - $n$  projecções e rebatimento de  $n-1$  planos de projecção
- 

- 2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica
- 2.4.1 Representação triédrica
- triedros trirrectângulos de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3)
  - eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z
  - coordenadas ortogonais:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (*abscissa* ou *largura*; *ordenada/afastamento* ou *profundidade*; *cota* ou *altura*)
  - representação triédrica de um ponto
- 2.4.2 Representação diédrica
- diedros de projecção
  - planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2)
  - eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra)
  - planos bissectores dos diedros
  - representação diédrica de um ponto
- 2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade
- 

### 3. Representação diédrica

---

- 3.1 Ponto
- 3.1.1 Localização de um ponto
- 3.1.2 Projecções de um ponto
- 

- 3.2 Segmento de recta
- 3.2.1 Projecções de um segmento de recta
- 3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção:
- perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical
  - paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas)
  - paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal
  - paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil
  - não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo
- 

- 3.3 Recta
- 3.3.1 Recta definida por dois pontos
- 3.3.2 Projecções da recta
- 3.3.3 Ponto pertencente a uma recta
- 3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores
- 3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção
- 3.3.6 Posição relativa de duas rectas
- complanares
  - paralelas
  - concorrentes
  - enviesadas
- 

- 3.4 Figuras planas I
- Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil
- 

- 3.5 Plano
- 3.5.1 Definição do plano por:
- 3 pontos não colineares
  - uma recta e um ponto exterior
-



- duas rectas paralelas
- duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção)
- 3.5.2 Rectas contidas num plano
- 3.5.3 Ponto pertencente a um plano
- 3.5.4 Rectas notáveis de um plano:
  - horizontais
  - frontais
  - de maior declive
  - de maior inclinação
- 3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção
 

Planos projectantes:

  - paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente)
  - perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical
  - perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)

Planos não projectantes:

  - de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X)
  - oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)

- 3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano)
  - 3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante
  - 3.6.2 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante
  - 3.6.3 Intersecção de dois planos projectantes
  - 3.6.4 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante
  - 3.6.5 Intersecção de uma recta com um plano (método geral)
  - 3.6.6 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o  $\beta_{24}$  ou  $\beta_{13}$
  - 3.6.7 Intersecção de planos (método geral)
  - 3.6.8 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um:
    - plano projectante
    - plano oblíquo
    - plano de rampa

## 11º ANO

- 3.7 Sólidos I
  - 3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil
  - 3.7.2 Prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil
  - 3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil)
  - 3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos

- 3.8 Métodos geométricos auxiliares I
  - 3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares - características e aptidões
  - 3.8.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança)
    - 3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto
    - 3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta
    - 3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano
  - 3.8.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação)
    - 3.8.3.1 Rotação do ponto
    - 3.8.3.2 Rotação da recta
    - 3.8.3.3 Rotação de um plano projectante
    - 3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes
    - 3.8.3.5 Rebatimento de planos não projectantes
      - rampa
      - oblíquo

---

3.9 Figuras planas II  
Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo

---

3.10 Sólidos II  
Pirâmides e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo

---

3.11 Secções  
3.11.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, prismas, cilindros) por planos - horizontal, frontal e de perfil  
3.11.2 Secções em sólidos (pirâmides, cones, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes ou de rampa  
3.11.3 Truncagem

#### **4. Representação axonométrica**

---

4.1 Introdução  
4.1.1 Caracterização  
4.1.2 Aplicações

---

4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais:  
Cavaleira e Planométrica  
4.2.1 Generalidades  
4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes  
4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo  
4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas

---

4.3 Axonometrias ortogonais:  
Trimetria, Dimetria e Isometria  
4.3.1 Generalidades  
4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas  
4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos  
4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo  
4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas

---

4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais  
Métodos de construção  
4.4.1 Método das coordenadas  
4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente  
4.4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)

---

## **SUGESTÕES METODOLÓGICAS GERAIS**

O presente programa adianta, em paralelo com a apresentação dos conteúdos, sugestões metodológicas que, embora não vinculativas, apontam para um modo preciso de encaminhar as actividades e para uma forma concreta de articulação das abordagens teóricas dos assuntos com a execução prática de problemas e traçados.

As aulas deverão ter um cariz teórico-prático, privilegiando a participação dos alunos. Mesmo nos momentos de explanação teórica de conceitos, o professor deverá conseguir provocar o questionamento das situações que apresenta, dando espaço para a indução ou para a construção dedutiva por parte do aluno. Esta postura metodológica envolvente facilitará a

compreensão das situações espaciais que se colocam, permitindo vislumbrar o seu encadeamento e fundamentação. Para isso será indispensável que as respostas sejam testadas e, eventualmente, comprovadas mediante a resolução prática de problemas. Esta metodologia da resolução de problemas, ao promover um processo de ensino-aprendizagem em que o aluno se torna actor de uma investigação, devidamente conduzida pelo professor, deverá ser, por isso mesmo, uma via a explorar. Aliás, são numerosas as sugestões didácticas específicas, que apontam esse caminho.

Como já foi referido no capítulo introdutório, numa fase inicial da aprendizagem, apontamos para uma didáctica assente no uso de modelos tridimensionais, especificamente concebidos para leccionar Geometria Descritiva, mas será sempre possível utilizar outros mais rudimentares (em papel, acrílico ou cartolina) que os próprios alunos podem executar.

Além disso, será da maior conveniência generalizar o uso de *software* de geometria dinâmica e, se possível, permitir aos alunos a sua manipulação, dadas as potencialidades deste *software* de promover um tipo de ensino-aprendizagem, que corresponde ao que elegemos, baseado na experimentação e na descoberta que, ademais, se revela altamente sedutor, estimulante e consequente.

Sugere-se sempre que possível, uma abordagem interdisciplinar, nomeadamente com a Área de Projecto.

Concretamente, poderão ser efectuados levantamentos de edifícios, de espaços, de equipamento ou mobiliário com a respectiva representação rigorosa, projectos cenográficos ou outros que envolvam a organização espacial ou a criação de pequenos objectos (como seja a organização de uma exposição a realizar na Escola, por exemplo). Qualquer das situações referidas poderá exigir a produção de maquetas tridimensionais e, no caso de os alunos já possuírem conhecimentos de CAD, será de extremo interesse proceder à construção de modelos virtuais.

Por outro lado, será útil convidar personalidades para dar palestras, ou até participar nas aulas, provenientes de diferentes ramos de actividade (arquitectura, engenharia, artes plásticas, design...) onde a presença da Geometria Descritiva constitui uma ferramenta fundamental para a concepção, compreensão e representação das formas que produzem. Sessões do mesmo tipo focando aspectos da História da Geometria Descritiva poderão também permitir entender as razões que levaram à necessidade de criação dos sistemas descritivos presentes neste Programa, ao entendimento do modo como evoluíram e ao equacionamento de perspectivas para o seu futuro, particularmente, se forem tidos em conta questões relacionadas com a História da Arte.

## COMPETÊNCIAS A DESENVOLVER

- Percepcionar e visualizar no espaço
- Aplicar os processos construtivos da representação
- Reconhecer a normalização referente ao desenho
- Utilizar os instrumentos de desenho e executar os traçados
- Utilizar a Geometria Descritiva em situações de comunicação e registo

- Representar formas reais ou imaginadas
- Ser autónomo no desenvolvimento de actividades individuais
- Planificar e organizar o trabalho
- Cooperar em trabalhos colectivos

## **AVALIAÇÃO**

A avaliação em Geometria Descritiva é contínua e integra três componentes: diagnóstica, formativa e sumativa.

Tem como referência os **objectivos e a aferição das competências adquiridas** e, define-se segundo **domínios** que se apresentam em seguida.

### **Conceitos**

Neste domínio, é objecto de avaliação a aplicação dos conceitos decorrentes dos conteúdos do programa: os implicados no conhecimento dos fundamentos teóricos dos sistemas de representação diédrica e axonométrica; os implicados no conhecimento dos processos construtivos da representação; os implicados no conhecimento da normalização.

A avaliação do conhecimento dos princípios teóricos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de representações de formas;
- a identificação dos sistemas de representação utilizados;
- a distinção entre as aptidões específicas de cada método, com vista à sua escolha na resolução de cada problema concreto de representação;
- o relacionamento de métodos e/ou processos.

A avaliação do conhecimento dos processos construtivos far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de dados ou de descrições verbais de procedimentos gráficos;
- aplicação dos processos construtivos na representação de formas;
- economia nos processos usados;
- descrição verbal dos procedimentos gráficos para a realização dos traçados.

A avaliação do conhecimento relativo à normalização far-se-á tendo em conta:

- a interpretação de desenhos normalizados;
- a aplicação das normas nos traçados.

### **Técnicas**

Neste domínio são objecto de avaliação: a utilização dos instrumentos de desenho e a execução dos traçados.

Quanto à utilização dos instrumentos, a avaliação será feita tendo em conta:

- a escolha dos instrumentos para as operações desejadas;

- a manipulação dos instrumentos;
- a manutenção dos instrumentos.

No que respeita à avaliação da execução dos traçados, serão tidos em conta:

- o cumprimento das normas;
- o rigor gráfico;
- a qualidade do traçado;
- a legibilidade das notações.

### **Realização**

Neste domínio, são objecto de avaliação: competências implicadas na utilização imediata da Geometria Descritiva em situações de comunicação ou registo; competências que actuam na capacidade de percepção e de visualização.

A avaliação da utilização da Geometria Descritiva como instrumento de comunicação ou registo, será feita tendo em conta:

- o recurso à representação de formas, para as descrever;
- a legibilidade e poder expressivo das representações;
- a pertinência dos desenhos realizados.

A avaliação da capacidade de representação de formas imaginadas ou reais terá em conta:

- a representação gráfica de ideias;
- a reprodução gráfica de formas memorizadas.

### **Atitudes**

Neste domínio consideram-se as atitudes manifestadas no trabalho, incidindo a avaliação sobre:

- autonomia no desenvolvimento de actividades individuais;
- cooperação em trabalhos colectivos;
- planificação e organização.

### **Técnicas e instrumentos de avaliação**

A recolha de dados para a avaliação far-se-á através de:

- trabalhos realizados nas actividades desenvolvidas nas aulas ou delas decorrentes, quer em termos dos produtos finais quer em termos dos materiais produzidos durante o processo;
- observação directa das operações realizadas durante a execução dos trabalhos;
- intervenções orais;
- provas de avaliação sumativa expressamente propostas;
- atitudes reveladas durante as actividades.

## **RECURSOS**

A didáctica sugerida para a disciplina de Geometria Descritiva no Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso, na sala de aula, de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor)
- Modelos tridimensionais
- *Video* didáctico de manipulação dos modelos
- Sólidos geométricos construídos em diversos materiais (placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, vinil com líquido colorido, madeira)
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, projectores de diapositivos e de *video*)
- Computadores com *software* de geometria dinâmica e/ou de *CAD*
- Projector de luz
- Fita métrica de 10m

Seria conveniente que cada escola dispusesse de uma sala específica da disciplina de Geometria Descritiva com os materiais referidos instalados e devidamente salvaguardados, assim como de armários e/ou cacifos para guardar o material individual dos alunos.

### 3. DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

#### GESTÃO

A gestão da carga horária pressupõe a metodologia proposta na apresentação e gestão dos conteúdos e considera como carga horária 3 horas x 33 semanas = 99 horas/ano, o que perfaz o total de 66 aulas de 90 minutos cada.

A atribuição de carga horária, expressa em números de aulas de 90 minutos cada, à abordagem de cada ponto do programa é uma sugestão passível de alteração, quer causada por demoras imprevistas nas actividades de desenvolvimento dessas abordagens, quer pela necessidade de organização da turma em grupos com ritmos de aprendizagem diferentes ou com trabalhos de execução de diferentes durações.

#### CONTEÚDOS/TEMAS, GESTÃO, SUGESTÕES METODOLÓGICAS

| 10º ANO   |                        |   |
|---|------------------------|---|
| DESENVOLVIMENTO   | Nº de AULAS/90 MINUTOS | SUGESTÕES METODOLÓGICAS   |
| <b>1. Módulo inicial</b>  | <b>9</b>               |   |
| 1.1 Ponto   | 9                      | Neste <i>módulo inicial</i> , onde se pretende visitar as noções essenciais de Geometria no Espaço veiculadas no ensino básico na disciplina de Matemática, tendo em vista o desenvolvimento do conhecimento espacial, deverá ser seguida uma abordagem meramente intuitiva do espaço com recurso a modelos tridimensionais, que podem ser, a própria sala de aula, os objectos que nela se encontram ou modelos específicos dos diferentes sólidos e superfícies a estudar.<br><br>Com esses referenciais, ou outros expedientes, poderão ser identificados e devidamente definidos os elementos geométricos e verificadas as suas posições relativas (relações de pertença, paralelismo, concorrência e a situação particular de perpendicularidade).<br><br>O estabelecimento das condições de paralelismo e perpendicularidade deverá ser tratado com particular atenção, sempre por via intuitiva, e recorrendo a exemplos e contra-exemplos. Pode testar-se, eventualmente, a |
| 1.2 Recta   |                        |   |
| 1.3 Posição relativa de duas rectas <ul style="list-style-type: none"><li>- complanares</li><li>- paralelas</li><li>- concorrentes</li><li>- enviesadas</li></ul>   |                        |   |
| 1.4 Plano   |                        |   |
| 1.5 Posição relativa de rectas e de planos <ul style="list-style-type: none"><li>- recta pertencente a um plano</li><li>- recta paralela a um plano</li><li>- recta concorrente com um plano</li><li>- planos paralelos</li><li>- planos concorrentes</li></ul> |                        |   |
| 1.6 Perpendicularidade de rectas e de planos <ul style="list-style-type: none"><li>- rectas perpendiculares e ortogonais</li><li>- recta perpendicular a um plano</li><li>- planos perpendiculares</li></ul>  |                        |   |
| 1.7 Superfícies<br>Generalidades, geratriz e directriz<br>Algumas superfícies: <ul style="list-style-type: none"><li>- plana</li><li>- piramidal</li><li>- cónica</li><li>- prismática</li><li>- cilíndrica</li><li>- esférica</li></ul>                        |                        |   |
| 1.8 Sólidos   |                        |   |

|  |   |
|--|---|
| <p>- pirâmides<br/>- prismas<br/>- cones<br/>- cilindros<br/>- esfera</p> <p>1.9 Secções planas de sólidos e truncagem</p> | <p>perpendicularidade de duas linhas traçadas no terreno ou a verticalidade de um candeeiro de pé ou da parede em relação ao plano horizontal do chão da sala de aula, recorrendo ao triângulo rectângulo 345. Procedimentos do mesmo tipo podem ser seguidos para verificação de situações de paralelismo.</p> <p>O domínio visual e espacial destas condições deverá permitir uma abordagem preliminar de problemas métricos de determinação de distâncias (distância entre dois pontos, de um ponto a uma recta, de um ponto a um plano, de dois planos paralelos) e de ângulos (ângulo de duas rectas, de uma recta com um plano, noção de diedro e ângulo diedro), levando o aluno a deduzir o conjunto de procedimentos necessários para chegar a uma solução.</p> <p>Para a introdução ao estudo das superfícies será útil recorrer aos <i>modelos B a K</i> ilustrativos dos vários tipos de superfície, quer para a sua classificação quer para o entendimento do modo como são geradas.</p> <p>As diversas situações de estudo propostas, incluindo superfícies e secções planas de sólidos, deverão ser conduzidas de modo a que sejam revitalizados as noções previamente adquiridas, no básico, sobre lugares geométricos.</p> <p>Exemplos de situações para “visualizar” o espaço (envolvendo as condições de paralelismo e perpendicularidade e outros conhecimentos) poderão ser problemas de determinação do lugar geométrico de pontos equidistantes,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- de um ponto</li> <li>- de uma recta</li> <li>- de um plano</li> <li>- dos extremos de um segmento de recta (plano mediador de um segmento de recta)</li> <li>- dos vértices de um quadrado</li> <li>- dos pontos de uma circunferência</li> <li>- das faces de um diedro</li> <li>- etc...</li> </ul> <p>ou de detecção da forma (ou formas) da secção plana de,</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- uma esfera</li> <li>- um cilindro de revolução</li> <li>- um cone de revolução</li> <li>- um cubo</li> </ul> <p>Recomenda-se que a forma das secções</p> |
|--|---|



|  |          |   |
|--|----------|---|
|  |          | <p>referidas seja verificada com recurso a modelos de vinil com líquido colorido.</p> <p>Para explorar a relação espaço-plano-espaço e uma vez que, nesta fase, não se pretende explorar qualquer tipo de representação descritiva, sugere-se que sejam efectuadas planificações de poliedros (pirâmides e prismas regulares e, caso seja possível, oblíquos de base regular) de modo a permitir a sua construção tridimensional (tal como, no ensino básico, pelo método da tentativa e erro: observando, medindo, corrigindo, construindo...). Se houver tempo e disponibilidade poderá ser ensaiada, inclusivamente, a planificação de troncos dos sólidos referidos. Tal como já era sugerido, a nível do ensino básico, este processo deverá ser reversível, ou seja, observando um sólido o aluno deverá conseguir planificá-lo e face a uma planificação qualquer deverá estar apto a deduzir a configuração do sólido. Este exercício permitirá, ademais, relembra algumas construções elementares da geometria plana, nomeadamente, de triângulos e de paralelogramos.</p> |
| <b>2. Introdução à Geometria Descritiva</b>  | <b>4</b> |   |
| 2.1 Geometria Descritiva<br>2.1.1 Resenha histórica<br>2.1.2 Objecto e finalidade<br>2.1.3 Noção de projecção<br>- projectante<br>- superfície de projecção<br>- projecção | 1        | <p>Sugere-se a amostragem de desenhos, através de acetatos ou diapositivos, que permitam ilustrar os diversos estádios de desenvolvimento da representação rigorosa, evidenciando a sua adequação às diferentes necessidades da actividade humana.</p> <p>Estes exemplos permitirão clarificar o papel desempenhado pela Geometria Descritiva no estudo exacto das formas dos objectos com recurso à sua representação gráfica.</p>   |
| 2.2 Tipos de projecção<br>2.2.1 Projecção central ou cónica<br>2.2.2 Projecção paralela ou cilíndrica<br>- projecção oblíqua ou clinogonal<br>- projecção ortogonal        | 1        | <p>A noção de ponto próprio e de ponto impróprio poderá ser melhor entendida pelos alunos através de exemplos que permitam acompanhar a transformação de uma situação na outra, como sejam:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- transformar duas rectas concorrentes em duas rectas paralelas fazendo deslizar o ponto de concorrência ao longo de uma delas de modo a torná-lo num ponto impróprio;</li> <li>- partir de um triângulo equilátero (<math>60^\circ+60^\circ+60^\circ</math>) e chegar a um triângulo isósceles (<math>90^\circ+90^\circ+0^\circ</math>) transformando um vértice num ponto impróprio;</li> <li>- aumentar progressivamente o raio de uma circunferência até à situação da</li> </ul>  |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   | <p>sua transformação numa recta, ou seja, numa circunferência cujo centro é um ponto impróprio;</p> <p>- etc...</p> <p>Seguindo esta mesma lógica pode começar-se por abordar a projecção central e, em seguida, passar à projecção paralela, entendendo esta como um caso particular da primeira.</p> <p>Exemplos concretos, facilmente disponíveis, de cada um dos tipos de projecção são, obviamente, as sombras de um objecto projectadas por um ponto de luz e pela luz do Sol.</p>  |
| <p>2.3 Sistemas de representação - sua caracterização:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- pelo tipo de projecção</li> <li>- pelo número de projecções utilizadas</li> <li>- pelas operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional <ul style="list-style-type: none"> <li>- projecção única</li> <li>- <math>n</math> projecções e rebatimento de <math>n-1</math> planos de projecção</li> </ul> </li> </ul>   | 1 | <p>Os sistemas de representação podem ser ilustrados com recurso à apresentação de imagens, sendo sempre vantajoso verificar como um mesmo objecto é descrito por cada um deles.</p> <p>Em <i>Ver pelo desenho</i> (ilustração 66, p.87) Manfredo Massironi utiliza um Fiat 500 numa figura extremamente sugestiva que, ademais, torna possível evidenciar as aptidões e vocação específica de alguns sistemas de representação.</p>  |
| <p>2.4 Introdução ao estudo dos sistemas de representação triédrica e diédrica</p> <p>2.4.1 Representação triédrica</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- triedros trirectângulos de projecção</li> <li>- planos de projecção: plano horizontal XY (plano 1), plano frontal ZX (plano 2), plano de perfil YZ (plano 3)</li> <li>- eixos de coordenadas ortogonais: X, Y, Z</li> <li>- coordenadas ortogonais: <math>x, y, z</math> (<i>abscissa</i> ou <i>largura</i>; <i>ordenada/afastamento</i> ou <i>profundidade; cota</i> ou <i>altura</i>)</li> <li>- representação triédrica de um ponto</li> </ul> <p>2.4.2 Representação diédrica</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- diedros de projecção</li> <li>- planos de projecção: plano horizontal (plano 1), plano frontal (plano 2)</li> <li>- eixo X ou aresta dos diedros – (Linha de Terra)</li> <li>- planos bissectores dos diedros</li> <li>- representação diédrica de um ponto</li> </ul> <p>2.4.3 Vantagens e inconvenientes de ambos os sistemas de representação; sua intermutabilidade</p> | 1 | <p>Para identificar e definir os elementos estruturantes do sistema de representação triédrica sugere-se a simulação da realidade espacial através da utilização do <i>modelo A</i> que nos servirá para identificar os triedros de projecção definidos pelo sistema de planos, o referencial analítico do espaço constituído pelos eixos de coordenadas, a localização inequívoca de um ponto no espaço através das suas coordenadas ortogonais, as suas projecções ortogonais nos planos de projecção, bem como o conjunto de operações efectuadas na passagem do tri para o bidimensional.</p> <p>O mesmo modelo, através da supressão do plano de perfil (plano 3) como terceiro plano de projecção, permitirá fazer a passagem para a representação diédrica cabendo agora iniciar o processo de demonstração da suficiência da dupla projecção ortogonal na resolução da maior parte dos problemas que envolvam os elementos geométricos (ponto, recta e plano) considerados individualmente ou em correlação.</p> <p>De regresso à representação triédrica pode sublinhar-se, por contraponto, a sua mais-valia no reconhecimento imediato e intuitivo de objectos tridimensionais, de tal modo que se torna possível,</p> |

|   |           |  |
|---|-----------|--|
|   |           | frequentemente, omitir a identificação dos vértices que os definem.  |
| <b>3. Representação diédrica</b>  | <b>98</b> |  |
| 3.1 Ponto<br>3.1.1 Localização de um ponto<br>3.1.2 Projecções de um ponto  | 4         | <p>Para facilitar a visualização espacial pode ser retomado o <i>modelo A</i>, onde facilmente se poderão simular as situações de projecção. Será da maior conveniência que, durante a aprendizagem, todos os alunos tenham possibilidade de utilizar o modelo sempre com uma observação frontal.</p> <p>Propõe-se que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- o estudo do ponto seja efectuado com recurso à tripla projecção;</li> <li>- o aluno distinga, no modelo, projectante, de coordenada e de projecção;</li> <li>- o aluno determine as coordenadas/projecções dos simétricos de um ponto relativamente a cada um dos planos de projecção ou ao eixo X;</li> <li>- represente as projecções de pontos situados nos semi-planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de rectas nesses planos.</li> </ul> |
| 3.2 Segmento de recta<br>3.2.1 Projecções de um segmento de recta<br>3.2.2 Posição do segmento de recta em relação aos planos de projecção:<br>- perpendicular a um plano de projecção: de topo, vertical<br>- paralelo aos dois planos de projecção: fronto-horizontal (perpendicular ao plano de referência das abcissas)<br>- paralelo a um plano de projecção: horizontal, frontal<br>- paralelo ao plano de referência das abcissas: de perfil<br>- não paralelo a qualquer dos planos de projecção: oblíquo | 3         | <p>Propõe-se que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- o estudo do segmento de recta seja efectuado com recurso à tripla projecção;</li> <li>- no modelo, o aluno relacione a dimensão do segmento no espaço com a da sua projecção em cada plano de projecção; devem, por isso, ser exploradas as possíveis situações de posicionamento do segmento, desde a sua posição paralela a um dos planos de projecção (e consequente verdadeira grandeza nesse plano) até à situação de perpendicularidade (quando a projecção do segmento se reduz a um ponto).</li> </ul>  |
| 3.3 Recta<br>3.3.1 Recta definida por dois pontos<br>3.3.2 Projecções da recta<br>3.3.3 Ponto pertencente a uma recta<br>3.3.4 Traços da recta nos planos de projecção e nos planos bissectores<br>3.3.5 Posição da recta em relação aos planos de projecção<br>3.3.6 Posição relativa de duas rectas<br>- complanares<br>- paralelas<br>- concorrentes   | 8         | <p>Propõe-se:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- partir das projecções de um segmento de recta definido pelos seus pontos extremos A e B para as projecções de uma recta definida por esses dois pontos; será conveniente encarar, também, as projecções de uma recta como resultantes da intersecção dos seus planos projectantes com os planos de projecção;</li> </ul>  |

|     |  |    |  |
|-----|--|----|--|
|     | - enviesadas   |    | <ul style="list-style-type: none"> <li>- levar o aluno a intuir o conceito de traço de recta a partir da consideração de pontos da recta progressivamente mais próximos do plano de projecção;</li> <li>- que, de uma recta, o aluno simule, no modelo: <ul style="list-style-type: none"> <li>- as projecções;</li> <li>- os traços;</li> </ul> </li> <li>- que o aluno conclua quais os diedros onde uma recta está localizada;</li> <li>- representar as projecções de rectas situadas nos planos de projecção, como pré-requisito da aprendizagem da determinação de traços de planos.</li> </ul>  |
| 3.4 | Figuras planas I<br>Polígonos e círculo horizontais, frontais ou de perfil   | 4  | <p>Recomenda-se o recurso à representação triédrica das figuras, o que se revela indispensável na situação de perfil.</p> <p>O uso de <i>software</i> de geometria dinâmica constitui um meio poderoso de visualização espacial das figuras em causa permitindo apreciar, em tempo real, mudanças sucessivas do seu posicionamento.</p>  |
| 3.5 | Plano  | 16 | <p>Será de tratar, como mais habitual por ser geral, a representação diédrica dos planos pelas projecções de três pontos não colineares ou de duas rectas paralelas ou de duas rectas concorrentes (que podem ser os traços do plano nos planos de projecção).</p> <p>Com o intuito de facilitar a visualização do plano, a sua representação por 3 pontos não colineares poderá ser transformada na representação do triângulo por eles definido.</p> <p>O estudo das posições do plano em relação aos planos de projecção poderá ser feito através do <i>modelo A</i> permitindo a visualização dos traços do plano e respectivas projecções, e os tipos de rectas do plano. Do mesmo modo poderá ser deduzida a condição para que:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- uma recta esteja contida num plano;</li> <li>- um ponto pertença a um plano.</li> </ul> <p>Em relação ao estudo do plano definido por uma recta de maior declive ou de maior inclinação sugere-se, igualmente, a observação da situação espacial no modelo, encaminhando os alunos a estabelecer a relação entre as projecções da referida recta e as rectas horizontais ou frontais do mesmo plano.</p> <p>Será de chamar a atenção para o facto dos traços do plano serem casos</p> |
|     | <p>3.5.1 Definição do plano por:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 3 pontos não colineares</li> <li>- uma recta e um ponto exterior</li> <li>- duas rectas paralelas</li> <li>- duas rectas concorrentes (incluindo a sua definição pelos traços nos planos de projecção)</li> </ul> <p>3.5.2 Rectas contidas num plano</p> <p>3.5.3 Ponto pertencente a um plano</p> <p>3.5.4 Rectas notáveis de um plano:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- horizontais</li> <li>- frontais</li> <li>- de maior declive</li> <li>- de maior inclinação</li> </ul> <p>3.5.5 Posição de um plano em relação aos planos de projecção</p> <p>Planos projectantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- paralelo a um dos planos de projecção: horizontal (de nível), frontal (de frente)</li> <li>- perpendicular a um só plano de projecção: de topo, vertical</li> <li>- perpendicular aos dois planos de projecção: de perfil (paralelo ao plano de referência das abcissas)</li> </ul> <p>Planos não projectantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- de rampa (paralelo ao eixo X e oblíquo aos planos de projecção - perpendicular ao plano de referência das abcissas); passante (contém o eixo X)</li> <li>- oblíquo (oblíquo em relação ao eixo X e aos planos de projecção)</li> </ul> |    |  |

|  |    |  |
|--|----|--|
|  |    | <p>particulares de rectas horizontais e rectas frontais do plano.</p> <p>Poderá ser útil fazer a distinção entre plano apoiado (onde é visível a mesma "face" em ambas as projecções), plano projectante e plano em tensão (no qual uma "face" visível numa projecção é invisível na outra). Esta distinção pode ser evidenciada com o auxílio da cor.</p> <p>Para clarificar a classificação de um plano como superfície bifacial ou bilateral poderá mencionar-se, por contraponto, a banda de Möbius, exemplo de uma superfície unifacial ou unilateral.</p>  |
| <p>3.6 Intersecções (recta/plano e plano/plano)</p> <p>3.6.1 Intersecção de uma recta projectante com um plano projectante</p> <p>3.6.9 Intersecção de uma recta não projectante com um plano projectante</p> <p>3.6.10 Intersecção de dois planos projectantes</p> <p>3.6.11 Intersecção de um plano projectante com um plano não projectante</p> <p>3.6.12 Intersecção de uma recta com um plano (método geral)</p> <p>3.6.13 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com o <math>\beta_{24}</math> ou <math>\beta_{13}</math></p> <p>3.6.14 Intersecção de planos (método geral)</p> <p>3.6.15 Intersecção de um plano (definido ou não pelos traços) com um:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- plano projectante</li> <li>- plano oblíquo</li> <li>- plano de rampa</li> </ul> | 18 | <p>Poderá salientar-se que, para determinar o ponto de intersecção de uma recta com um plano projectante ou de uma recta projectante com um plano, bastará aplicar a condição de pertença (ou incidência) entre ponto e plano.</p> <p>Na determinação da intersecção de dois planos oblíquos poderão ser usados como planos auxiliares os planos projectantes e/ou o <math>\beta_{24}</math>.</p> <p>Na determinação da intersecção de dois planos de rampa sugere-se como método alternativo o recurso à terceira projecção no plano de referência das abcissas. O mesmo se pode fazer, na intersecção de um plano ou de uma recta com um plano passante, tirando-se partido do facto de o plano passante ser projectante em relação ao plano de referência das abcissas.</p>   |
| <b>11º ANO</b>   |    |  |
| <p>3.7 Sólidos I</p> <p>3.7.1 Pirâmides (regulares e oblíquas de base regular) e cones (de revolução e oblíquos de base circular) de base horizontal, frontal ou de perfil</p> <p>3.7.2 Prismas (regulares e oblíquos de base regular) e cilindros (de revolução e oblíquos de base circular) de bases horizontais, frontais ou de perfil</p> <p>3.7.3 Esfera; círculos máximos (horizontal, frontal e de perfil)</p> <p>3.7.4 Pontos e linhas situados nas arestas, nas faces ou nas superfícies dos sólidos</p>  | 7  | <p>Como introdução ao estudo dos sólidos poder-se-á recorrer a modelos tridimensionais, vídeos, ao CAD ou a <i>software</i> de geometria dinâmica. O manuseamento e a visualização de modelos, de acordo com os enunciados dos problemas, poderá facilitar a leitura e compreensão das projecções, incluindo o reconhecimento das invisibilidades.</p> <p>Será vantajoso que os alunos desenhem as projecções de várias figuras planas coloridas com diferentes cotas ou afastamentos para melhor percepção das visibilidades.</p> <p>Em alternativa, sugere-se que os alunos partam das projecções de um polígono (ou círculo) e de um ponto exterior ou de dois polígonos (ou círculos) sobrepostos concluindo, então, as projecções do respectivo sólido, seus contornos aparentes e suas visibilidades e invisibilidades. Será ainda vantajoso</p> |

|  |    |  |
|--|----|--|
|  |    | <p>utilizar a cor na representação de arestas (eventualmente geratrizes) ou, em alternativa, colorir as faces (eventualmente superfície lateral) com cores diferentes. Esta diferenciação permitirá que os alunos tenham uma percepção facilitada das visibilidades ou invisibilidades de arestas (geratrizes) ou faces (superfície lateral) nas diferentes projecções.</p> <p>Quando os sólidos apresentem base(s) ou face(s) de perfil poderá ser necessário recorrer à terceira projecção.</p> <p>Convém que seja dada especial atenção a dois dos sólidos platónicos - tetraedro e hexaedro regulares - ao fazer o estudo representativo de pirâmides e prismas, respectivamente.</p>  |
| <p>3.8 Métodos geométricos auxiliares I</p> <p>3.8.1 Estrutura comparada dos métodos auxiliares<br/>- características e aptidões</p> <p>3.8.2 Mudança de diedros de projecção (casos que impliquem apenas uma mudança)</p> <p>3.8.2.1 Transformação das projecções de um ponto</p> <p>3.8.2.2 Transformação das projecções de uma recta</p> <p>3.8.2.3 Transformação das projecções de elementos definidores de um plano</p> | 4  | <p>Nesta fase de estudo é de propor aos alunos a resolução dos seguintes problemas-tipo:</p> <p>transformar</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- recta horizontal em recta de topo</li> <li>- recta frontal em recta vertical</li> <li>- recta oblíqua em recta horizontal ou frontal</li> <li>- plano de topo em plano horizontal</li> <li>- plano vertical em plano frontal</li> </ul>   |
| <p>3.8.3 Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação)</p> <p>3.8.3.1 Rotação do ponto</p> <p>3.8.3.2 Rotação da recta</p> <p>3.8.3.3 Rotação de um plano projectante</p> <p>3.8.3.4 Rebatimento de planos projectantes</p> <p>3.8.3.5 Rebatimento de planos não projectantes<br/>- rampa<br/>- oblíquo</p>  | 10 | <p>No estudo da rotação da recta (<i>modelo L</i>) propõem-se os seguintes problemas-tipo:</p> <p>transformar</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- uma recta horizontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta de topo</li> <li>- uma recta frontal numa recta fronto-horizontal ou numa recta vertical</li> <li>- uma recta oblíqua numa recta horizontal ou frontal</li> </ul> <p>Recomenda-se que, no estudo das rotações, se recorra a <i>software</i> de geometria dinâmica, não só porque essa transformação é uma operação base desse tipo de programas, mas também porque se torna possível acompanhar o movimento espacial da figura.</p> <p>Sendo o rebatimento um caso particular de rotação deve o aluno ser alertado para o facto de que na rotação de um plano, o eixo mais conveniente a utilizar deverá estar contido no próprio plano; nestas circunstâncias, a rotação passará</p> |

|      |  |  |
|------|--|--|
|      |  | <p>a denominar-se rebatimento.</p> <p>O aluno deverá resolver problemas de rebatimento, tanto para os planos de projecção como para planos paralelos a estes, devendo o professor orientar essa escolha segundo o princípio de economia de meios.</p> <p>Para tratar o rebatimento de planos e concretamente do plano oblíquo, será conveniente recorrer ao <i>modelo M</i>, onde se podem observar as rectas notáveis do plano, e o plano projectante que é perpendicular ao plano dado para ilustrar espacialmente o método do triângulo do rebatimento. O mesmo modelo, agora sem o plano projectante auxiliar, poderá servir para exemplificar o processo que utiliza as horizontais, frontais ou outras rectas do plano, no rebatimento.</p>  |
| 3.9  | <p>Figuras planas II</p> <p>Figuras planas (polígonos e círculo) situadas em planos verticais ou de topo</p>   | <p>4</p> <p>Para a resolução deste tipo de problemas poderá salientar-se que o método dos rebatimentos é, em geral, o mais adequado, sobretudo por permitir a aplicação do Teorema de Désargues utilizando a charneira do rebatimento como eixo de afinidade. Além disso, simplificará muito os problemas, a realização do rebatimento para um plano que contenha, pelo menos, um vértice da figura.</p>   |
| 3.10 | <p>Sólidos II</p> <p>Pirâmides e prismas regulares com base(s) situada(s) em planos verticais ou de topo</p>   | <p>8</p> <p>Mais uma vez se recomenda o uso de modelos tridimensionais dos sólidos em estudo bem como do <i>software</i> já mencionado.</p>  |
| 3.11 | <p>Secções</p> <p>3.11.1 Secções em sólidos (pirâmides, cones, prismas, cilindros) por planos - horizontal, frontal e de perfil</p> <p>3.11.2 Secções em sólidos (pirâmides, cones, prismas, cilindros) com base(s) horizontal(ais), frontal(ais) ou de perfil por planos projectantes ou de rampa</p> <p>3.11.3 Truncagem</p> | <p>12</p> <p>Sugere-se que os alunos analisem e concluam a gradual complexidade das secções em pirâmides, preconizando-se a seguinte sequência de situações:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- secção de pirâmide intersectando apenas a superfície lateral: <ul style="list-style-type: none"> <li>• sem aresta(s) de perfil</li> <li>• com aresta(s) de perfil;</li> </ul> </li> <li>- secção de pirâmide intersectando a superfície lateral e a base: <ul style="list-style-type: none"> <li>• sem aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção</li> <li>• com aresta(s) da base perpendicular(es) ao plano de projecção.</li> </ul> </li> </ul> <p>Propõe-se que o professor leve os alunos a concluir os diferentes tipos de secção plana produzida num cone. Para tal poderá recorrer a um candeeiro com um quebra-luz de boca circular e apreciar a mancha de luz projectada na parede,</p> |

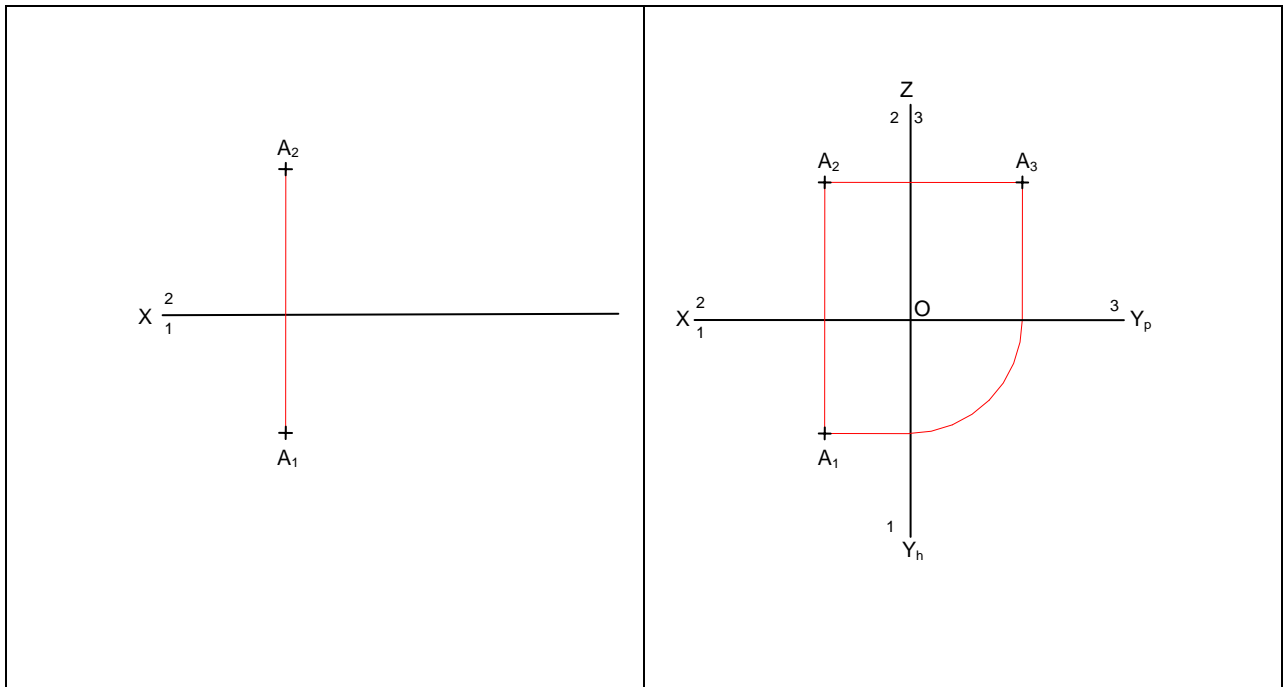
|  |           |  |
|--|-----------|--|
|  |           | <p>funcionando esta como plano secante do cone luminoso. A deslocação do ponto de luz permitirá observar as diversas cónicas produzidas na parede.</p> <p>Em relação ao prisma e ao cilindro, os alunos deverão concluir que um plano pode seccioná-los intersectando só a superfície lateral, a superfície lateral e uma das bases ou a superfície lateral e as duas bases.</p> <p>Poder-se-á utilizar o Teorema de Désargues para determinação das secções planas de sólidos (ou, pelo menos, fazer a sua verificação) dada a relação de homologia existente entre a figura da secção e a figura da base do sólido, notando que o centro de homologia será o vértice (próprio ou impróprio) do sólido, o eixo, a recta de intersecção do plano da secção com o plano da base e os raios, as suas arestas ou geratrizes.</p> <p>Na resolução de problemas, que envolvam o traçado da elipse, será conveniente que os alunos determinem as projecções dos seus eixos sendo os demais pontos da elipse obtidos, quer por recurso a planos auxiliares, quer por recurso a construções já conhecidas (por exemplo: processo da régua de papel ou construção por afinidade).</p> <p>Será do maior interesse para concluir esta unidade e como aplicação dos conceitos apreendidos (particularmente do método das rotações) realizar planificações de sólidos (cones e cilindros) e de sólidos truncados. Poder-se-á propor, seguidamente, a realização de maquetas dos sólidos previamente planificados.</p> |
| <b>4. Representação axonométrica</b>                       | <b>21</b> |  |
| 4.1 Introdução<br>4.1.1 Caracterização<br>4.1.2 Aplicações | 4         | <p>Para ilustrar as diferenças entre as várias axonometrias e entre estas e os sistemas de representação diédrica ou triédrica, sugere-se a utilização de um modelo constituído pelos três eixos de coordenadas e de um paralelepípedo com as suas arestas coincidentes com os eixos, que poderá ser posicionado em relação ao plano de projecção consoante as necessidades.</p> <p>Para dar conta do vasto campo de aplicação das axonometrias, poderão ser apresentados aos alunos imagens de axonometrias de objectos ou peças da construção mecânica, de produções no âmbito do <i>design</i> industrial (o que permitirá frisar que é precisamente a revolução industrial que leva à difusão</p>  |



|  |   |  |
|--|---|--|
|  |   | <p>generalizada e uso intensivo deste sistema de representação) e de objectos arquitectónicos (como meio privilegiado para o seu estudo, mas também como ferramenta no trabalho de concepção e criação), salientando a funcionalidade e intencionalidade do uso da axonometria, na descrição dessas formas.</p>  |
| <p>4.2 Axonometrias oblíquas ou clinogonais:<br/>Cavaleira e Planométrica</p> <p>4.2.1 Generalidades</p> <p>4.2.2 Direcção e inclinação das projectantes</p> <p>4.2.3 Determinação gráfica da escala axonométrica do eixo normal ao plano de projecção através do rebatimento do plano projectante desse eixo</p> <p>4.2.4 Axonometrias clinogonais normalizadas</p> |   | <p>No tratamento das axonometrias clinogonais é fundamental estudar a influência do posicionamento dos raios projectantes em relação ao plano axonométrico. Nesse sentido, deve fixar-se um determinado ângulo de inclinação e fazer variar a direcção e, para uma mesma direcção, variar a inclinação dos raios projectantes, para apreciar os efeitos produzidos.</p> <p>Em concreto, pode fazer-se a projecção de um cubo e verificar a maior ou menor possibilidade de reconhecer esse poliedro nas diferentes situações. Poder-se-á verificar que os ângulos de fuga e os coeficientes de redução convencionados obedecem a este princípio de perceptibilidade, mas deverá ser realçada, ao mesmo tempo, a possibilidade de seguir objectivos opostos procurando, deliberadamente, distorções.</p>  |
| <p>4.3 Axonometrias ortogonais:<br/>Trimetria, Dimetria e Isometria</p> <p>4.3.1 Generalidades</p> <p>4.3.2 Determinação gráfica das escalas axonométricas</p> <p>4.3.2.1 Rebatimento do plano definido por um par de eixos</p> <p>4.3.2.2 Rebatimento do plano projectante de um eixo</p> <p>4.3.3 Axonometrias ortogonais normalizadas</p>                         | 4 | <p>Para caracterizar as axonometrias ortogonais e determinar os ângulos dos eixos axonométricos em cada tipo de axonometria, é aconselhável utilizar um modelo (<i>modelo N</i>) constituído pelo sistema de eixos coordenados, passível de adaptação a cada uma das situações.</p> <p>No modelo poder-se-á evidenciar claramente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- a correspondência biunívoca entre a posição do sistema de eixos no espaço e a sua projecção no plano axonométrico;</li> <li>- os traços dos eixos de coordenadas no plano de projecção, ou seja, os vértices do <b>triângulo fundamental axonométrica</b> com vértice na origem do sistema de eixos;</li> <li>- a configuração deste triângulo e as suas propriedades em cada axonometria;</li> <li>- a redução das medidas resultante da inclinação dos eixos.</li> </ul> <p>Se o modelo permitir rebater as faces da pirâmide axonométrica e/ou o triângulo correspondente à secção produzida na pirâmide por um plano projectante de um</p> |

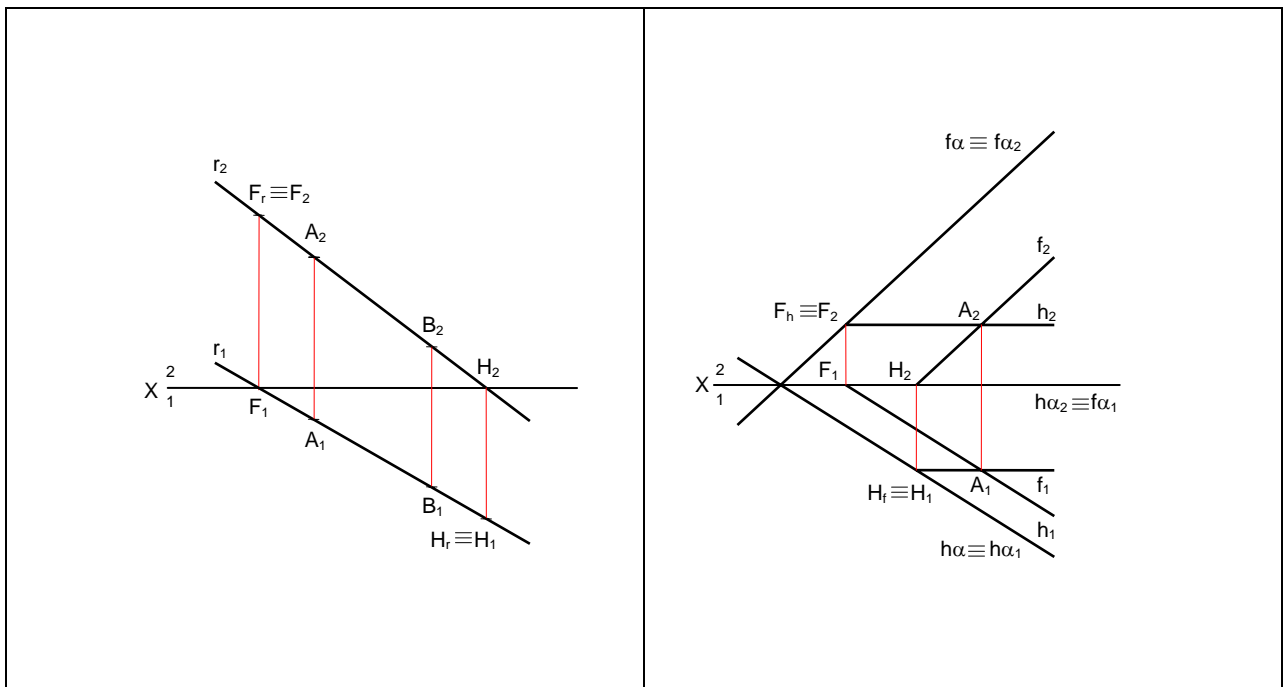
|   |    |   |
|---|----|---|
|   |    | <p>eixo, o que seria desejável, poder-se--á ilustrar, espacialmente, o processo conducente à determinação das escalas axonométricas.</p> <p>Neste processo deverá salientar-se:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- o teorema da geometria plana que permite a fixação do ponto correspondente ao rebatimento da origem;</li> <li>- os conhecimentos anteriores relativos ao rebatimento de um plano oblíquo no sistema de representação diédrica e, conseqüentemente, o recurso ao Teorema de Désargues quando se pretende chegar à projecção de uma figura contida na face da pirâmide axonométrica rebatida</li> </ul> <p>Com o intuito de explicitar o relacionamento da representação diédrica com a representação axonométrica, poderá ainda comparar-se a projecção axonométrica de um sólido (um cubo, p.ex.) com a sua projecção diédrica, quando o sólido tem uma das suas faces situada num plano oblíquo.</p> <p>Poderá ser igualmente mencionada a possibilidade de operar com axonometrias normalizadas com a utilização de coeficientes de redução convencionais, podendo confrontar-se os resultados obtidos com as axonometrias anteriormente estudadas nas quais se utilizam coeficientes de redução real.</p> |
| <p>4.4 Representação axonométrica de formas tridimensionais simples ou compostas por:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• paralelepípedos rectângulos com as bases ou faces paralelas a um dos planos coordenados</li> <li>• pirâmides e prismas regulares e oblíquos de base(s) regular(es) com a(s) referida(s) base(s) paralela(s) a um dos planos coordenados e com pelo menos uma aresta da(s) base(s) paralela(s) a um eixo</li> <li>• cones e cilindros de revolução e oblíquos com base(s) em verdadeira grandeza (só no caso da axonometria clinogonal)</li> </ul> <p>Métodos de construção</p> <p>4.4.1 Método das coordenadas</p> <p>4.4.2 Método do paralelepípedo circunscrito ou envolvente</p> <p>4.4.3 Método dos cortes (só no caso da axonometria ortogonal)</p> | 13 | <p>Deve propor-se ao aluno a realização de axonometrias de formas tridimensionais simples ou compostas, segundo os diferentes métodos de construção. No caso da axonometria ortogonal será de dar especial ênfase ao chamado "método dos cortes" (4.4.3) devido à sua relação directa com a representação diédrica e triédrica.</p>   |

# CONVENÇÕES DE REPRESENTAÇÃO E SIMBOLOGIA



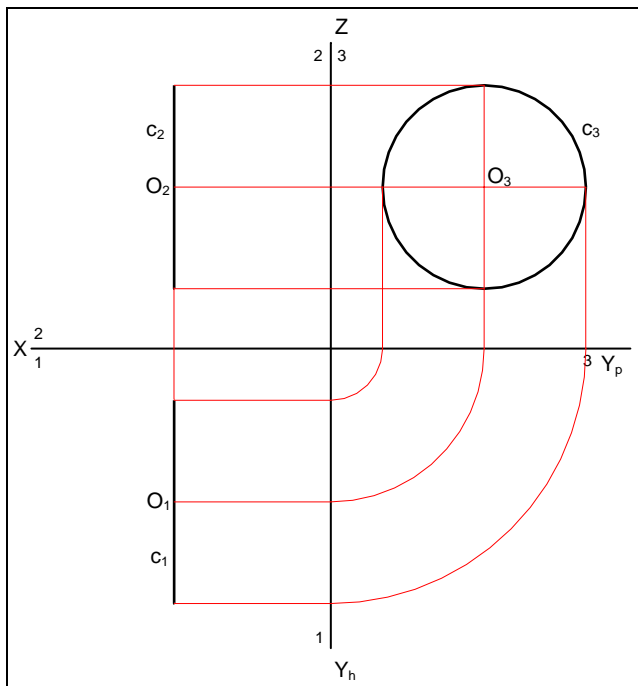
Representação diédrica de um ponto  $A$  de coordenadas positivas

Representação triédrica de um ponto  $A$  de coordenadas positivas

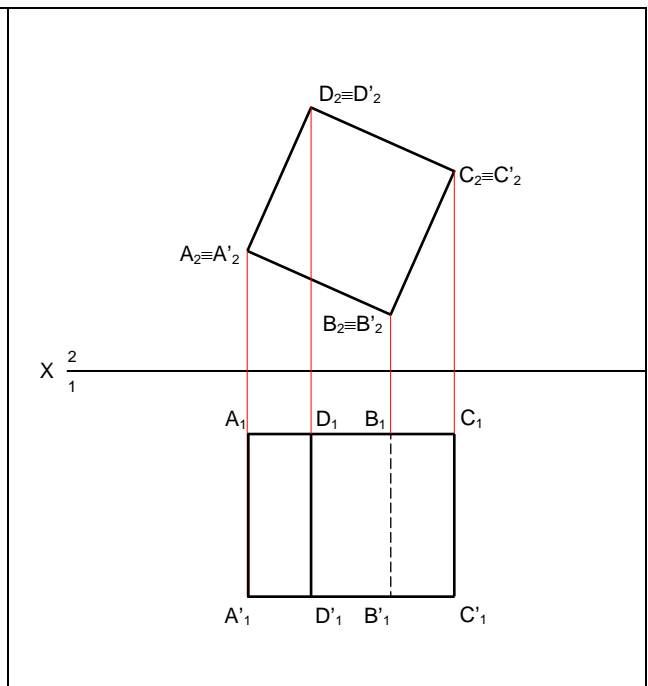


Representação de uma recta  $r$  e dos seus traços horizontal e frontal

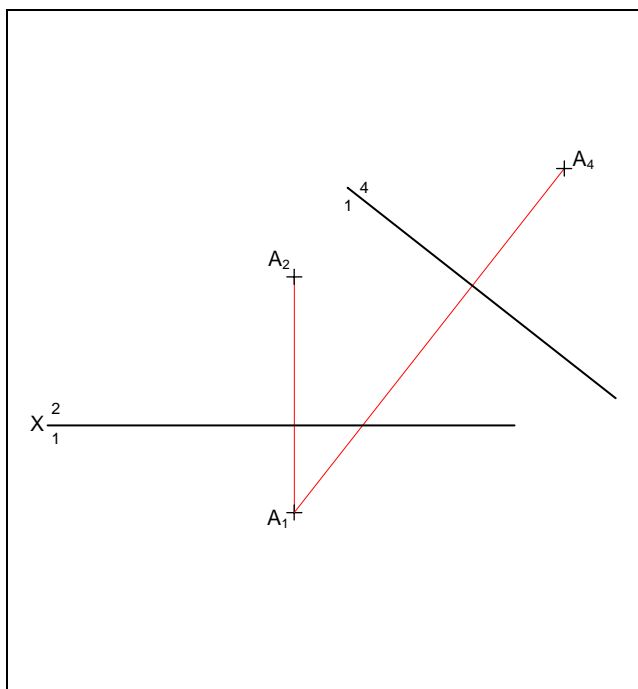
Representação de um plano  $\alpha$  pelos seus traços horizontal e frontal e duas rectas horizontal e frontal do plano



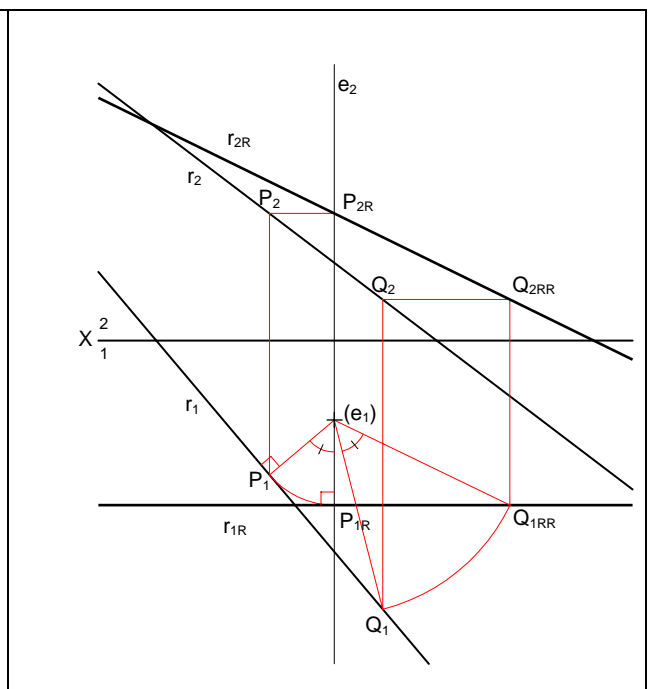
Representação triédrica de uma circunferência  $c$  de perfil



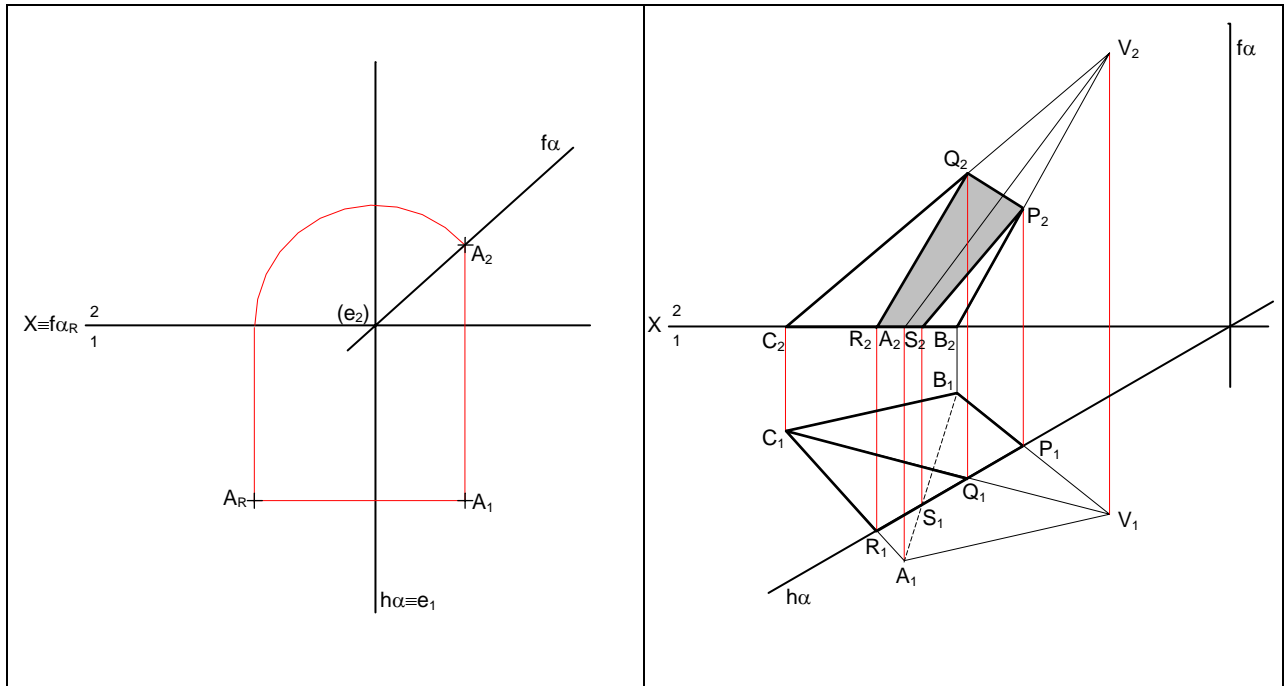
Representação diédrica de um prisma regular de bases frontais



Mudança de diedros  
Projeções de um ponto  $A$  em diferentes diedros

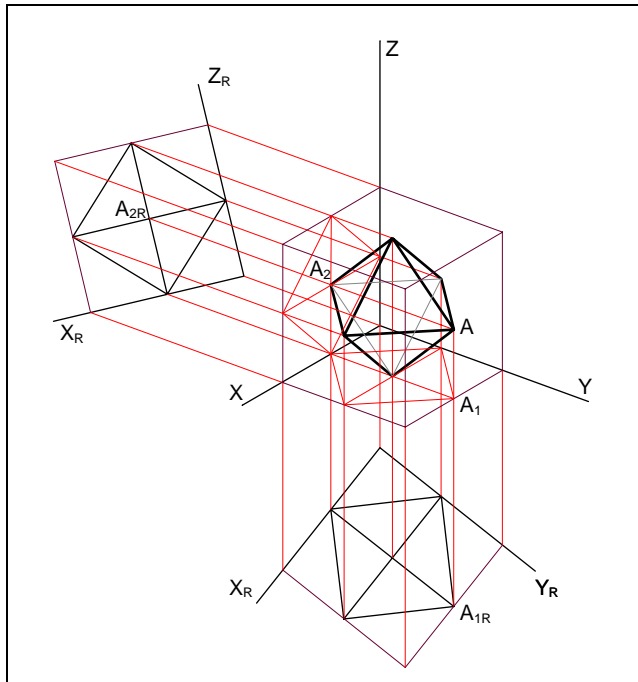


Transformação de uma recta oblíqua  $r$  numa recta frontal através de uma rotação em torno de um eixo vertical  $e$



Rebatimento de um plano de topo em torno do seu traço horizontal

Secção de uma pirâmide oblíqua de base regular por um plano vertical



Representação trimétrica de um octaedro com aplicação simultânea de dois métodos construtivos: do paralelepípedo envolvente e dos cortes

## MODELOS DIDÁCTICOS

Existe um conjunto de modelos expressamente concebidos para a leccionação da disciplina de Geometria Descritiva que são os seguintes:

### MODELO A

Este modelo é constituído pelo sistema de planos (realizados em acrílico transparente) utilizados na representação diédrica e triédrica e permite o rebatimento do plano horizontal e do plano de perfil para o plano frontal de projecção.

Como acessórios são fornecidas elementos que representam tridimensionalmente pontos, rectas e planos que podem ser projectados e representados nos planos de projecção.

### MODELOS B a K

Este conjunto de modelos permite a visualização cinética de várias superfícies através da rotação de uma geratriz em torno de um eixo vertical.

Concretamente torna-se possível ver e entender o modo como é gerado um plano, um cilindro, um cone, uma esfera, um hiperbolóide (dois modelos de uma folha e um modelo de duas folhas), um parabolóide, um elipsóide e um toro.

### MODELO L

Este modelo é um acessório do modelo A tendo sido concebido para visualizar a rotação de uma recta.

### MODELO M

Modelo destinado a visualizar o rebatimento de um plano oblíquo, quer pelo triângulo do rebatimento quer pelas rectas horizontais ou frontais do plano. O plano oblíquo é truncado por um plano projectante que lhe é perpendicular, também ele rebatível, de modo a permitir a visualização do triângulo do rebatimento e a determinação da sua verdadeira grandeza, o que permite reproduzir espacialmente todas as operações que serão efectuadas no papel para rebater o plano.

### MODELO N

Realizado com esquadros de desenho este modelo, que se destina à leccionação das axonometrias, permite a visualização do triedro definido pelos planos coordenados e da pirâmide axonométrica quando fazemos coincidir a sua base (triângulo fundamental) com o plano axonométrico. Nesta última situação torna-se possível efectuar o rebatimento de uma face da pirâmide para o plano de projecção, bem como o seu contra-rebatimento, dando a entender os procedimentos necessários para a determinação de verdadeiras grandezas e das escalas axonométricas.

## GLOSSÁRIO

**eixo X** ou **aresta dos diedros** (linha de terra) - recta de intersecção do plano horizontal de projecção com o plano frontal de projecção

**axonometrias clinogonais** – axonometrias oblíquas (ver projecção clinogonal)

**axonometria planométrica** – designação pela qual é actualmente conhecida a axonometria militar (norma ISO 5456)

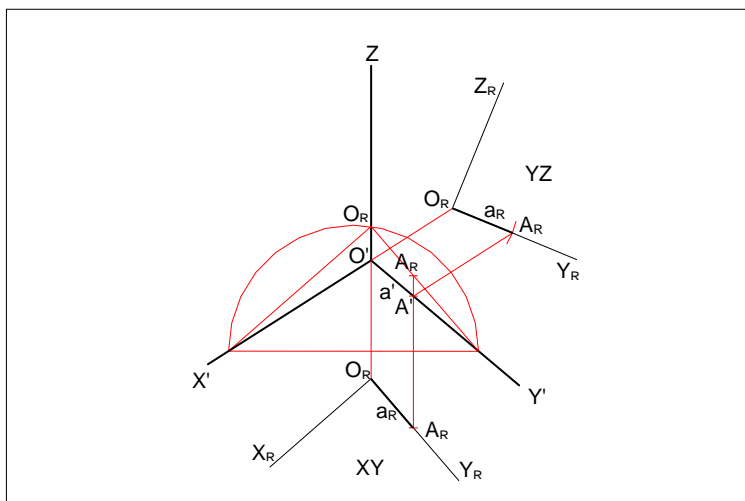
**diedros de projecção** (quadrantes) – são as quatro regiões do espaço definidas pelos planos de projecção horizontal e frontal. Trata-se, por conseguinte, de quatro diedros rectos, arestalmente opostos. Distinguem-se de qualquer outro diedro dada a sua especificidade devida à condição de serem definidos pelos planos de projecção.

**eixos de coordenadas ortogonais** - referencial analítico ou cartesiano do espaço definido pelas rectas de intersecção dos planos coordenados: horizontal, frontal e de perfil; este referencial deve ser considerado em sentido directo o que, convém notar, tem como consequência que as *abscissas* ou *larguras* positivas são marcadas para a esquerda do plano de perfil

**incidência** - o conceito de incidência diz respeito à mais simples relação possível entre as entidades fundamentais da geometria projectiva - os pontos, as rectas e os planos - ou seja a relação de pertença (**incidir** significa *estar em* ou *passar por*)

**sistema de representação** – caracteriza-se pela utilização de um determinado tipo de projecção, discriminação do número de planos de projecção e da sua posição relativa, pelo modo como é efectuada a passagem do tri para o bidimensional (ver normas ISO 5456-2, ISO 5456-3, ISO 5456-4 e ISO 10209-2)

**método dos cortes** – processo que consiste no rebatimento dos planos coordenados para o interior da pirâmide axonométrica (para evitar que os planos coordenados apresentem faces distintas após o rebatimento), seguido de uma translação de cada par de eixos de coordenadas segundo uma direcção normal à charneira do rebatimento, permitindo a representação de cortes horizontais e verticais do objecto. Por contra-rebatimento e através da conjugação de, pelo menos, dois cortes, obtém-se a projecção axonométrica do objecto.



**mudança de diedros de projecção** (mudança de planos) - utiliza-se esta designação dado que a mudança de um plano de projecção implica a mudança de diedros (note-se que as novas projecções de um ponto se correspondem através de uma nova linha de chamada)

**plano frontal de projecção** (plano vertical de projecção) - plano frontal de afastamento nulo

**projectão clinogonal** - termo utilizado para designar a projectão paralela oblíqua em relação a um plano de projectão; o termo clinogonal surge por contraponto ao termo ortogonal, encontrando-se ambos ao mesmo nível por implicarem, em si mesmos, o conceito de direcção

**rectas de maior declive de um plano** - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano horizontal

**rectas de maior inclinação de um plano** - rectas de maior inclinação (ou de maior ângulo) do plano em relação ao plano frontal

**representação diédrica** ou **sistema de representação diédrica** - método ou sistema de Monge, método ou sistema da dupla projectão ortogonal, método ou sistema diédrico, projectão diédrica, etc...

**teorema de Désargues** - se dois triângulos têm os seus vértices alinhados a partir de um ponto (centro de projectão próprio ou impróprio), as rectas que prolongam os seus lados cortam-se, duas a duas, segundo três pontos alinhados

**triedros trirrectângulos de projectão** - são os oito triedros rectos definidos pelos planos de projectão horizontal, frontal e de perfil



## 4. BIBLIOGRAFIA

As indicações bibliográficas seguintes destinam-se fundamentalmente a professores. As obras assinaladas com um asterisco podem também ser do interesse dos alunos.

### Didáctica Específica

Bensabat, F. (1996). *Ensinar Geometria Descritiva*. Trabalho realizado em regime de licença sabática, Lisboa. [texto policopiado]

Fruto da própria experiência pessoal do autor, como professor, e do contributo directo de alguns colegas, este trabalho é uma reflexão sobre o ensino da geometria descritiva e as consequências da sua aprendizagem no crescimento dos estudantes enquanto seres humanos (o que é confirmado pelos depoimentos finais de alguns alunos) sem descurar o quanto o próprio professor aprende ao ensinar. Constitui, por conseguinte, um contributo importante para a definição das finalidades da aprendizagem da disciplina no âmbito do ensino secundário, para a delimitação do âmbito de objectivos e conteúdos e de uma metodologia de ensino da Geometria Descritiva.

\*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Planos a médio e longo prazo - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

\*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 11º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

\*Gama, M. J.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P.; Rebelo, J. A. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Ponto, Recta, Plano, Rebatimento)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

\*Rebelo, J. A. (1986). *Modelos Didácticos, Filme Didáctico (Superfícies)*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

\*Rebelo, J. A.; Silveira, M. F.; Carvalho, J. P. (1987). *Geometria Descritiva - Actividades de Aprendizagem e de Avaliação - 12º ano Técnico-Profissional*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Estas obras, que culminaram a experiência pedagógica do relançamento do ensino técnico em Portugal em 1983-1984 pelo MEC, foram o resultado da necessidade de realizar estudos pedagógicos que possibilitassem leccionar, com sucesso e em menos tempo, os mesmos conteúdos da via vocacional.

### Geometria

\*Aguilar, L. T. (1993). *Alguns conceitos geométricos*. Lisboa: Lusolivro.

Este livro veicula informação essencial sobre geometria euclidiana que o autor considera indispensável como matéria introdutória ao estudo da Geometria Descritiva. Alguns dos

conceitos geométricos referidos correspondem aos conteúdos do módulo inicial previsto neste Programa.

Castelnuovo, E. (1965). *La Via della Matematica - La Geometria* (5ª ed. 1977). Florença: La Nuova Italia.

Livro que ensina a ensinar geometria em ligação à realidade concreta, recorrendo frequentemente ao uso de modelos bi ou tridimensionais dinâmicos. Muitas das propostas de trabalho apresentadas são uma antecipação do *software* de geometria dinâmica que hoje temos à nossa disposição. Saliência especial para o capítulo sobre transformações geométricas.

Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986). *Une Histoire des Mathématiques - Routes et Dédalles*. Paris: Editions du Seuil.

Sendo, como o próprio título indica, uma história das matemáticas, este livro dá particular relevo à história da geometria tratando, cuidadosamente, os temas relacionados com a geometria projectiva.

Fernandes, A.N. P. (1967). *Elementos de Geometria* (2). Coimbra: Coimbra Editora.

É um “antigo” compêndio para o 3º, 4º e 5º anos dos liceus, que aborda a geometria euclidiana, no plano e no espaço, de forma axiomática. Inclui, por conseguinte, numerosos teoremas da geometria euclidiana e as respectivas demonstrações.

Glaser, R. (1927). *Geometría del Espacio*. Barcelona: Editorial Labor SA, Biblioteca de Iniciación Cultural.

Uma geometria no espaço (euclidiano) tratada de forma axiomática mas que aborda também, sumariamente, as projecções paralelas ou cilíndricas. Particularmente relevante é o estudo de superfícies e corpos de revolução e das respectivas secções planas. Atenda-se, igualmente, ao estudo desenvolvido da esfera e da superfície esférica.

Godeaux, L. (1960). *As Geometrias*. Lisboa: Edições Europa-América, Coleção Saber.

Este livro trata a evolução da geometria, desde a geometria elementar (euclidiana) até à topologia, sistematizando as diferentes geometrias de acordo com a racionalização proposta por Klein e Sophus Lie, alicerçada, no conceito de invariante de uma transformação geométrica e na teoria dos grupos de Galois.

Joly, L. (1978). *Structure*. Lausanne: Editions Spes.

Obra geral sobre geometria, na qual são abordadas várias geometrias. Concebido como um livro didáctico visa permitir uma visão geral da estrutura das formas físicas e, mais particularmente, mostrar a importância capital da Geometria na criação e na existência de formas de qualquer espécie. Particularmente indicado para o ensino da geometria em cursos artísticos. No dizer de Rainer Mason este livro está concebido como uma “verdadeira escola da visão sem extrapolações filosóficas”.

Loria, G. (1921). *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai Giorni nostri*. Milano: Ulrico Hoepli, Manuali Hoepi.

História dos diferentes sistemas de representação descritivos (perspectiva, dupla projecção ortogonal, planos cotados e axonometria), construída através das contribuições provenientes de diversas personalidades, e respectivos países, para o desenvolvimento da Geometria

Descritiva. Saliência especial para a referência à situação portuguesa onde é referido o contributo de Motta Pegado e Schiappa Monteiro.

Macedo, A. A F.(1947). *A Geometria ao Alcance de toda a Gente, Parte I, Iniciação geométrica* (Vol. I e II, pp. 127 e 133). Lisboa: Cosmos, Biblioteca Cosmos.

Este livro de iniciação à geometria elementar, no plano (vol. I, planimetria) e no espaço (vol. II, estereometria e complementos), acaba por tratar os conceitos fundamentais da geometria de forma desenvolvida e rigorosa mas bastante acessível porque ligada a situações concretas retiradas da realidade envolvente. Saliencia-se no 1º volume o tema da semelhança de triângulos e a sua aplicação na determinação de distâncias inacessíveis e, no 2º, o estudo desenvolvido da perpendicularidade de rectas e planos directamente relacionada, mais uma vez, com o problema da determinação de distâncias.

Marcogli, A. (1971). *Teoria del Campo - Corso di educazione alla Visione* (2). Florença: Sansoni.

Texto relativo aos fundamentos visuais, tratados em articulação com actividades de projecto, mas que aborda com bastante desenvolvimento temas da geometria, da geometria descritiva e projectiva, da cartografia, da matemática, da topologia, sempre ligados a experiências desenvolvidas na sala de aula.

Massironi, M. (1983). *Ver pelo Desenho - Aspectos técnicos, cognitivos, comunicativos*. Lisboa: Edições 70.

“Ver pelo desenho”, como o próprio título pressupõe, procura demonstrar como o desenho é um instrumento determinante de conhecimento e de comunicação. Constituindo uma abordagem lata a todas as formas de representação este livro não deixa de abordar, especificamente, a participação da geometria descritiva e do desenho técnico neste processo.

\*Morais, J. S.(1996). *Desenho de Construções mecânicas I (Desenho Básico)*. Porto: Porto Editora.

Manual que aborda a normalização referente ao desenho (traçado, equipamento e cotagem), as construções básicas da geometria plana (no capítulo desenho geométrico), e trata o tema das projecções, com uma introdução à representação diédrica e múltipla projecção, à axonometria e perspectiva.

Reinhardt, F.& Soeder H. (1984). *Atlas de Matemáticas 1 - Fundamentos, Álgebra y Geometria*. Madrid: Alianza Editorial.

Obra de carácter expositivo, justapondo a cada página de texto uma página de ilustrações correspondente, recolhendo exemplos, fórmulas, tabelas e representações geométricas. O 1º volume abarca fundamentos de matemática, a álgebra, a geometria e a topologia. Em virtude do índice alfabético pormenorizado este livro pode utilizar-se também como obra de consulta e prontuário.

\*Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Esta obra cobre inúmeros temas de Geometria Elementar (e menos elementar) e contém um manual de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos históricos que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho a desenvolver, eventualmente, na área de projecto, ou ainda para alunos mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da

Geometria. O recurso a *software* de geometria dinâmica é usado de forma “natural” para “resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc.” Este livro tem já um “prolongamento” na Internet no endereço:

<http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.htm>

## Geometria Descritiva

Albuquerque, L. (1969). *Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Almedina.

Este livro, que se inicia com uma abordagem à geometria projectiva e, seguidamente, desenvolve o estudo do sistema da dupla projecção ortogonal, da projecção cónica central e das projecções cotadas, evidencia, pela sua própria organização, a importância estrutural da geometria projectiva na construção de qualquer sistema descritivo.

Almeida, Á. D. (1996). Nota acerca de alguns equívocos suscitados por um método de edição de axonometria (contributo para uma necessária discussão de conceitos). *Boletim da APROGED*, (1) 10-11.

Reflexão sobre a adequação e vocação da axonometria na representação de formas. Nomeadamente defende-se, com justeza, que, quanto mais ordenada for a forma do objecto relativamente ao sistema de eixos coordenados, maior será a eficácia do sistema axonométrico na sua representação.

\*Aubert, J. (1982), *Dessin d'Architecture a partir de la Geometrie Descriptive*. Paris: Edition la Villette.

Curso de Desenho de Arquitectura a partir da Geometria Descritiva, para uso dos alunos do 1º ano das escolas de arquitectura.

\*Carreira, A. (1972). *Compêndio de Desenho* [para o 3º ciclo do ensino liceal]. Lisboa: Livraria Sá e Costa.

Adoptado como livro único nos anos 60/70 para um programa iniciado em 1949 foi, à morte do autor, completado por Mata de Almeida. É uma obra bem sistematizada abarcando o desenho geométrico (geometria descritiva), o esboço cotado e o desenho à vista. É um digno continuador da obra de Marques Leitão de 1909.

Costa, M. C. (1997). Reflexões sobre o ensino e as aplicações da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED*, (3 e 4.) 9-13.

Este texto, onde são enunciadas as finalidades, os objectivos, as competências e os conteúdos que devem integrar o ensino da Geometria Descritiva a nível secundário e a nível superior, constituiu (conjuntamente com os pareceres dados pelo autor sobre versões anteriores) um referencial determinante na elaboração dos actuais Programas de Geometria Descritiva do Ensino Secundário.

Costa, M. C. (1998). O futuro da Geometria Descritiva. *Boletim da APROGED*, (7). 3-14.

Produzido na sequência da palestra com o mesmo título proferida no Seminário “Como ensinar Geometria Descritiva”, organizado pela APROGED, este artigo revisita a história da Geometria Descritiva para enquadrar o momento actual e perspectivar o futuro da disciplina face aos

novos desafios levantados pela invenção formal, aliada às novas possibilidades tecnológicas, de arquitectos como Ghery e Eisenman, postulando a indispensabilidade da disciplina no âmbito da representação gráfica e da estruturação formal dos objectos, particularmente, como ferramenta conceptual.

\*França, A. (s/d). *Caderno Auxiliar de Geometria Descritiva*. Porto: Livraria Athena.

Livro de exercícios que é um complemento do compêndio de António Carreira.

Geffroy, J. (1945). *Traité pratique de Géométrie Descriptive*. Paris: Librairie Armand Colin.

É um pequeno tratado de geometria descritiva que trata as várias situações espaciais utilizando em simultâneo as projecções cotadas e a dupla projecção ortogonal. Destaca-se o recurso a qualquer dos métodos auxiliares e a preocupação de estabelecer maiores ou menores valias de cada um deles na resolução concreta de problemas. Dedicar um dos capítulos à homologia plana.

\*Gonçalves, L. (1979). *Geometria Descritiva 1 - 10º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda.

\*Gonçalves, L. (1981). *Geometria Descritiva 2 - 11º Ano de Escolaridade*. Lisboa: Emp. Lit. Fluminense Lda..

Baseado nos programas em vigor nos anos 80, foram na verdade, como o próprio autor afirma no prefácio "uma resposta possível aos condicionalismos do nosso Ensino e às dificuldades que os alunos vêm sentindo", evitando "receitas" e situações que, pelo seu particularismo, se tornassem "enigmas".

Gordon, V.O., Sementsov, M.A. & Oguievsky (1974). *Problemas de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Gordon, V. O., Sementsov, M. A. & Oguievsky (1980). *Curso de Geometria Descriptiva*. Moscovo: Mir.

Os parâmetros que caracterizam esta obra assemelham-se aos indicados na obra de Krylov, abaixo referida.

Guasp, J. B. (1995). *Sistema Diedrico Directo - Fundamentos y Ejercicios 1*. San Sebastián: Editorial Donostiarra.

Neste livro é proposta a utilização do sistema diédrico directo, no qual, as entidades geométricas, consideradas individualmente ou em relação, são tratadas sem ter em consideração um referencial fixo de projecção. Deste modo torna-se irrelevante a representação das rectas de intersecção dos planos de projecção (eixo X ou LT), bem como, dos traços de rectas e de planos nesses mesmos planos de projecção. Num dos capítulos procura-se estabelecer uma comparação entre a representação diédrica convencional (ou clássica) e a directa.

Haack, W. (1962). *Geometria Descriptiva*. Cidade do México: Uthea. [3 Volumes]

Nos dois primeiros tomos desta obra trata-se, principalmente, dos sistemas de representação que indicam as dimensões dos corpos; enquanto no terceiro volume se expõem, preferencialmente os que proporcionam um carácter mais intuitivo e imediato ao desenho. A relação com resultados puramente matemáticos consiste na dedução e nas demonstrações dos diferentes sistemas.

Izquierdo Asensi, F. (1985). *Geometria Descriptiva* (Vol. 16). Madrid: Editorial Dossat SA.

Esta *Geometria Descritiva* trata exaustivamente os sistemas diédrico, cotado, axonométrico e cónico (onde se inclui uma abordagem à projecção gnomónica e à construção de relógios de sol), ainda que o tipo de abordagem proposto seja, sobretudo, pragmática. É contudo, no âmbito do sistema diédrico, que é dado maior desenvolvimento ao estudo de sólidos e de superfícies, sendo tratadas questões de concordância ou de intersecção recíproca.

Krylov, N., Lobandievsky, P. & Maine, S. (1971). *Géométrie Descriptive*. Moscovo: MIR.

Esta obra centra o desenvolvimento dos seus conteúdos na importância prática da Geometria Descritiva na familiarização com a linguagem representativa e técnica expressiva dos desenhos, ensinando a construí-los e a lê-los sem dificuldade. Obviamente o estudo da Geometria Descritiva contribui para formar uma imaginação representativa e adquirir hábitos de raciocínio lógico. Aperfeiçoa a aptidão para recriar em pensamento a forma dos objectos representados sobre um plano e prepara, assim, o futuro técnico (arquitecto, designer, engenheiro), para o estudo de disciplinas espaciais e para a criação técnica pelo estabelecimento de projectos.

\*Leitão, C.A. M. (1909). *Desenho*. Lisboa: Fernandes e Companhia Editores. [5 volumes]

Apesar da sua edição datar de 1909, pode considerar-se, pedagogicamente, das obras mais profundas no ensino do, então, Desenho, com uma qualidade gráfica (e de leitura) que não vemos conseguida actualmente em obras do ensino secundário de Desenho e Geometria Descritiva.

Mateus, N. C. (2001). Os problemas básicos da Geometria Descritiva (a propósito dos novos Programas). *Boletim da APROGED*, (14). 3-9.

Transcrição da intervenção do autor no III encontro da APROGED – “Geometria: que futuro?” – onde se questiona, com pertinência, a sequência metodológica clássica no ensino da Geometria Descritiva que, na opinião do autor, tem contribuído para o insucesso escolar real na aprendizagem da disciplina. Nuno Mateus acompanha esta crítica de uma contraproposta que justifica, cuidadosamente, quer sob o ponto de vista científico quer pedagógico.

Monge, G. (ed. 1996). *Geometría Descritiva*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales e Puertos.

Trata-se da edição *facsimilada* de uma tradução castelhana de 1803, da *Geometria Descritiva* de Monge para uso na “Escuela de Caminos”, precedida do historial da respectiva escola e de algumas notas sobre a Geometria Descritiva e o seu ensino em Espanha. Destaque para a qualidade, excelente, das ilustrações.

Morais, J. S. (1995). *Geometria Descritiva* [para o 1º Ano de Engenharia Mecânica]. Porto: FEUP – DMEGI. [policopiado]

Sebenta, destinada aos alunos de Engenharia Mecânica da FEUP, sobre os fundamentos da representação diédrica, onde se ensaia e se tenta demonstrar a maior versatilidade e funcionalidade do sistema directo em contraponto com sistema clássico de Monge. Destaca-se, ainda, o desenvolvimento do estudo da representação axonométrica ortogonal e o capítulo consagrado a planificações.

Nannoni, D. (1978, 1981). *Il Mondo delle Proiezioni - Applicazioni della Geometria Descritiva e Proiettiva* (1, 2, 3). Bologna: Cappelli Editore.

Este tratado de geometria projectiva e descritiva trata de forma rigorosa e exaustiva os diferentes sistemas de representação. Salienta-se a primeira parte do livro sobre homologia e afinidade e os capítulos onde se desenvolve o estudo das sombras.

Pal, I. (1959). *Geometria Descrittiva (con Figuras estereoscopicas)*. Madrid: Aguilar.

Na linha de TAIBO, tem um similar recente na obra de R. SCHMIDT.

Pegado, L. P. M. (1899). *Curso de Geometria Descrittiva da Escola Polytechnica - Tomo I e II - Texto*. Lisboa: Typographia da Academia Real das Sciencias.

Este curso, da autoria de um dos maiores géometras portugueses, é um verdadeiro tratado sobre a matéria sendo, por isso, indispensável para todos que a queiram estudar a fundo. Extremamente relevante é o facto de Motta Pegado, dando nota de uma total actualização científica, tratar a geometria descritiva tendo sempre como pano de fundo as transformações geométricas. É, aliás, por aí que se inicia o seu livro. Considerando irrelevante a fixação dos planos de projecção Pegado não utiliza a LT. Para além da dupla projecção ortogonal o autor também trata o sistema das projecções cotadas.

\*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1979). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 39). Lisboa: Ministério da Educação.

\*Pinheiro, C. S. & Sousa, P. F. (1980). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 55). Lisboa: Min. da Educação e Ciência.

Compêndios destinados ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU39 compreende o estudo de superfícies e das sombras em dupla projecção ortogonal. O TPU55 desenvolve estudo da perspectiva e da representação axonométrica.

Ribeiro, C. T. (1991), *Geometria Projectiva*. Lisboa: Editora Europress.

“...sem dúvida, um excelente auxiliar dos estudantes e profissionais de engenharia, visando ensinar e ajudar a utilizar de forma mais eficiente a linguagem da profissão.” (Transcrição, com a devida vénia, da opinião de Veiga da Cunha no prefácio desta obra).

Rodriguez de Abajo, F. J. (1992). *Geometria Descrittiva - Sistema Diédrico*. San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Abordagem exaustiva e sistemática do “sistema diédrico” . Nota-se que o autor sugere o recurso à tripla projecção ortogonal para resolver situações de perfil. Saliência, também, como é norma em todos os livros dirigidos por Rodriguez de Abajo, para o capítulo introdutório sobre homologia onde se realiza um estudo desenvolvido das cónicas. Esse capital oferecido logo de início é activamente utilizado nas diversas situações projectivas tratadas em representação diédrica.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BENGUA, V. A. (1987). *Geometria Descrittiva - Sistema Axonometrico*. (5ª ed.) Alcoy: Editorial Marfil SA.

Na linha do livro dedicado ao sistema diédrico também este desenvolve, com profundidade, o estudo do sistema axonométrico ortogonal.

Rodríguez de Abajo, F. J. & BLANCO, A. R. (1982), *Geometria Descriptiva - Sistema de Perspectiva Caballera*. (3ª ed.) San Sebastian: Editorial Donostiarra.

Estudo desenvolvido da axonometria por projecção oblíqua muito semelhante ao dedicado à axonometria ortogonal.

Sánchez Gallego, J. A. (1992). *Geometría Descriptiva - Sistemas de Proyección cilíndrica*. Barcelona. Ediciones UPC.

Livro muito interessante sobre os diversos sistemas de projecção cilíndrica particularmente porque se propõe o estudo das diversas situações/problemas espaciais utilizando em simultâneo os vários sistemas de representação. Também relevantes são os capítulos iniciais onde se discute a essência de cada um deles e a sua vocação particular. Em relação à representação diédrica a preferência de Gallego recai sobre o diédrico directo, preferência essa que justifica com uma sólida argumentação. Em relação à representação axonométrica são apresentados dados históricos que enquadram o aparecimento do “método dos cortes” sendo devidamente explicado o seu funcionamento e aplicação.

\*Sant’ana, S. & GOMES, B. (1980). *Desenho e Geometria Descritiva*. Porto: Porto Editora.

Livro de texto conciso, com exercícios muito bem elaborados.

\*Santos, P.(s/d). *Aprender a ver em Geometria Descritiva*. Coimbra: Livraria Arnado.

Obra destinada à iniciação em Geometria Descritiva como o próprio título sugere. A sua apresentação como livro em folhas soltas permite que os alunos executem a montagem tridimensional e, efectuando os cortes e dobragens convenientes, tenham a “percepção” da passagem ao bidimensional (plano de desenho).

\*Schmidt, R. (1986). *Geometria Descriptiva con Figuras estereoscópicas*. Barcelona: Editorial Reverté SA.

A obra mais completa e cuidada em termos de representação de superfícies em estereoscopia.

\*Sousa, P. F.(s/d). *Desenho*. Textos Pré-Universitários (Vol. 13). Lisboa: Ministério da Educação.

Compêndio destinado ao ano propedêutico (que o 12º ano de escolaridade substituiu). O TPU13 compreende uma introdução à dupla projecção ortogonal seguida do estudo dos métodos auxiliares e de problemas métricos.

Taibo, A. (1943). *Geometria Descriptiva e sus aplicaciones* [3 volumes]. Madrid: s/ed.

Das primeiras obras com figuras em estéreo.

Xavier, J. P. (1999). Acerca da “nova” terminologia dos Programas de Desenho e Geometria Descritiva A e B. *Boletim da APROGED*, (9). 13-15.

Neste artigo, como o próprio título indica, procura-se mostrar que a terminologia usada nos actuais Programas de Geometria Descritiva não tem qualquer novidade estando já largamente difundida e utilizada (excepto no nosso País) à luz da necessidade de fazer convergir áreas disciplinares distintas, mas afins, como sejam, a Geometria Analítica, a Geometria Descritiva e o Desenho Técnico.

Xavier, J. P. (2000). A Axonometria como método descritivo. *Boletim da APROGED*, (12). 7-22.



Transcrição de uma comunicação apresentada no Encontro Nacional da APROGED, “Saber ver a Geometria Descritiva”, onde o autor se debruça sobre o enquadramento histórico-cultural da representação axonométrica. O texto constitui, igualmente, uma reflexão sobre a preponderância actual deste sistema de representação na modelação tridimensional em CAD. Na parte final é apresentado um método construtivo na axonometria ortogonal, conhecido como “método dos cortes”, secundado pela amostragem de trabalhos de alunos de Geometria da FAUP.

## Desenho Técnico

\*Cunha, L. V. (1984). *Desenho Técnico* (Vol. 6). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Manual sobre os mais variados temas de desenho técnico (embora não actualizado) precedido de informação sobre muitas construções geométricas euclidianas.

Morais, J. S. (1996). *Desenho de construções mecânicas III (Desenho Técnico)*. Porto: Porto Editora.

Livro de referência sobre Desenho Técnico e, também, um dos mais actualizados sobre o tema.

## NORMAS

Norma ISO 128 Princípios gerais de representação

Norma ISO 216 Formatos de papéis

Norma ISO 2594 Métodos de projecção (desenho de construção civil)

Norma ISO 3098 Escrita

Norma ISO 5456-1/2/3/4 Métodos de projecção

Norma ISO 5457 Formatos dos desenhos

Norma ISO 9175 a 9180 Material de desenho

Norma ISO 10209-1 Termos relativos aos desenhos técnicos  
(generalidades e tipo de desenho)

Norma ISO 10209-2 Termos relativos aos métodos de projecção

## Endereços na Internet:

<http://www.geom.umn.edu/>

<http://www.ul.ie/~rynnnet/keanea/homepage.html>

<http://www.albares.com/dibujotecnico/salaestudios/salaestudios.htm>

<http://www.arq.ufrgs.br/>

<http://www.mat.uel.br/barison/DGGDcont.htm>

[http://www.cce.ufsc.br/~ligsouza/geometria\\_descritiva.htm](http://www.cce.ufsc.br/~ligsouza/geometria_descritiva.htm)